EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN – WS 2022/23, TEIL A

VERA FISCHER

ZUSAMMENFASSUNG. Dieses Skript entspricht dem während des Winter Semesters 2022 in der Vorlesung "Einführung in das mathematische Arbeiten" unterrichteten Lehrstoff, Teil A, umfasst Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Mengenlehre, Zahlenmengen, wie auch erste Schritte in Analysis (Folgen reeller Zahlen und Reihen) und ist für das selbständige erlernen des Lehrstoffes geeignet. Ein großer herzlicher Dank geht an den Studierenden für zahlreiche Fragen und Diskussionen während der Vorlesungen: Ausgewählte Beispiele und Zusammenhänge, die während dieser Diskussionen besprochen wurden, müssen immer noch ihren Weg in dieses Skriptum finden, was in späteren Fassungen der Fall sein wird.

INHALTSVERZEICHNIS

Date: 9. Dezember 2022.

1. Einführung

1.1. **Notation.**

Definition 1.1.1. (Matrizen) Matrizen kann man als ein rechteckiges Schema von Zahlen definieren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Die Matrize A hat 3 Zeilen und 5 Spalten.

- a_{ij} bezeichnet das Element in Zeile i und Spalte j. Hier $a_{12} = 2$ und $a_{34} = 14$
- Hat eine Matrize n Zeilen und m Spalten, wird sie eine $n \times m$-Matrize genannt, z.B. ist A eine 3×5 Matrize.
- Wenn $n = m$, wird die Matrize *quadratisch* genannt. Wenn $n \neq m$, wird sie *rechteckig* genannt.

Definition 1.1.2. (Kronecker-Delta Symbol) Seien $i, j \in \mathbb{N}$. Dann

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte: Die senkrecht geschwungene Klammer bezeichnet eine Fallunterscheidung. Das Wort "sonst" bezeichnet die übrigen (nicht explizit beschriebenen) Fälle. Das Zeichen ":=" (definitorisches Gleichheitszeichen) bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird.

Ein allgemeines Polynom n-ten Grades hat die Form $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Mit der Hilfe dem Summenzeichen schreibt man $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Hier wird i Summenindex genannt. Der Summenindex nimmt alle ganzen Zahlen beginnend mit der unteren Grenze bis zur oberen Grenze an.

Beispiel 1.1.3.

(1) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
(3) $\sum_{i=1}^{3} 7 = 7 + 7 + 7 = 21$
(4) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$
(5) Sei $I = \{4, 5, 7\}$. Dann $\sum_{i \in I} a_i = a_4 + a_5 + a_7$.

Beispiel 1.1.4. (weitere Besispiele und Bemerkungen)

(1) Indexverschiebung: $\sum_{i=3}^{9} a_i = \sum_{j=1}^{7} a_{j+2}$
(2) Doppelsummen: $\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{4} \delta_{ij} = 5$
(3) Nach Definition ist das Ergebnis einer allgemeinen Summe gleich 0, falls die untere Grenze größer als die obere Grenze ist.

Definition 1.1.5. (Produktzeichen) Seien $b_1, \cdots, b_5$ reelle Zahlen. Dann bezeichnet $\prod_{i=1}^{5} b_i$ das Produkt $b_1b_2b_3b_4b_5$. Nach Definition ist das leere Produkt (wenn die obere Grenze kleiner als die untere Grenze) gleich 1.

Man beachte $\prod_{i=1}^{10} 7x_i = 7^{10} \prod_{i=1}^{10} x_i$.

Diskussion 1.1.6. Teleskopsumme, Teleskopprodukt

- (Teleskopsumme) $\sum_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$.
- (Teleskopprodukt) $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_n}{a_0}$.

1.2. **Vollständige Induktion.** Betrachten wir das folgende Beispiel.

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^1 \qquad A(1)\\
1+3 &= 2^2 \qquad A(2)\\
1+3+5 &= 3^2 \qquad A(3)\\
1+3+5+7 &= 4^2 \qquad A(4)\\
1+3+5+7+9 &= 5^2 \qquad A(5)
\end{aligned}
$$

Anhand der obigen Gleichungen können wir die folgende Vermutung/Behauptung formulieren. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A(n)$ die Aussage: *Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich n^2.* Wir behaupten, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Aussage $A(n)$ wahr ist. Das heißt, wir behaupten das unendlich viele Aussagen wahr sind. Um unsere Vermutung zu beweisen, müssen wir die Sammlung der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}$, etwas genauer anschauen.

Diskussion 1.2.1. (Schlüsseleigenschaften der natürlichen Zahlen)

(1) 0 ist eine natürliche Zahl
(2) Ist $n \in \mathbb{N}$, dann $n+1 \in \mathbb{N}$.
(3) $n+1 \neq 0$ für jede $n \in \mathbb{N}$.
(4) Wenn n, m natürlichen Zahlen sind und $n+1 = m+1$, dann gilt auch $n = m$.
(5) Jede natürliche Zahl n kann durch endlich viele Schritte von 0 mit Addition von 1 erreicht werden.

Bemerkung 1.2.2. Sei $k \in \mathbb{N}$. Ähnlich zu (5) kann jedes $n \geq k$ durch endlich viele Schritte von k mit Addition von 1 erreicht werden.

Diskussion 1.2.3. (Vollständige Induktion) Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$ zu beweisen, wobei k eine gegebene natürliche Zahl ist, kann man folgenderweise vorgehen:

(1) (*Induktionsanfang*) Überprüfe ob $A(k)$ gilt.
(2) (*Induktionsschritt*) Zeige das Folgende: Wenn $n \geq k$ eine beliebige natürliche Zahl ist und $A(n)$ gilt, gilt auch $A(n+1)$. Die Annahme, dass $A(n)$ gilt, wird *Induktionsannahme* genannt.

Wenn die Induktionsanfang und den Induktionsschritt gelten, kann man daraus schließen, dass die Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$ gilt.

Behauptung 1.2.4. Sei n eine beliebige natürliche Zahl, $n \geq 1$. Dann ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2.

Beweis. Induktionsanfang: Die Behauptung $A(1)$ gilt.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für n: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Induktionsschritt: Dann

$$A(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+2-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

Da jede natürliche Zahl $n \geq 1$ durch endlich viele Schritte von 1 mit Addition von 1 erreicht werden kann, gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. □

Diskussion 1.2.5. (Schlüsseleigenschaften II)

A. Für jede natürliche Zahl n gilt das Folgende: Entweder $n = 0$ oder es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n = m + 1$. Im letzteren Fall sagen wir, dass n ein Nachfolger (von m) ist.
B. Jede Teilmenge (Sammlung) von natürlichen Zahlen, die wenigstens ein Element hat, hat ein kleinstes Element.

Als nächstes werden wir einige wichtige Begriffe einführen. Die Menge, die keine Elemente hat, wird *die leere Menge* genannt und eine Menge, die wenigstens ein Element hat, wird *nicht leer* genannt.

Beweis. (Indirekter Beweis: Vollständige Induktion) Angenommen den Induktionsanfang $A(1)$ und den Induktionsschritt gelten. Wir behaupten, dass für jede $n \geq 1$, $A(n)$ gilt. Wenn das nicht der Fall ist, dann gibt es eine Zahl $m \geq 1$, so dass $A(m)$ falsch ist. Dann ist die Menge X aller $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, so dass $A(k)$ falsch ist, nicht leer und damit hat X ein kleinstes Element. Sei m_0 diese kleinste Zahl. Dann $m_0 = n_0 + 1$ für ein n_0. Da $A(1)$ wahr ist, $m_0 > 1$ und damit $n_0 \geq 1$. Es gilt $n_0 < m_0$ und da m_0 die kleinste Zahl in X ist, haben wir $n_0 \notin X$. Da $n_0 \geq 1$ ist, ist $A(n_0)$ wahr. Allerdings gilt nach dem Induktionsschritt $A(n_0 + 1)$ auch. D.h. $A(m_0)$ ist wahr, was ein Widerspruch ist! Damit ist die Existenz der Zahl m widerlegt und ist alles bewiesen. □

Behauptung 1.2.6. (Summenformel für die geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{R}, \neq 1$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \text{ und } \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1.$$

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für n:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k \\
&= q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} && \text{nach Induktionsannahme} \\
&= \frac{q^{n+1}(1 - q) + 1 - q^{n+1}}{1 - q} && \text{Zusammenfassen der Brüche} \\
&= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}
\end{aligned}$$

□

Behauptung 1.2.7. Sei $n \geq 1$. Es gilt

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}.$$

Beweis. *Induktionsanfang* Sei $n = 1$. Die Behauptung gilt.

Induktionsannahme Die Behauptung gelte für n:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}.$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1-1)} \\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{nach Induktionsannahme} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} \quad \text{Zusammenfassen der Brüche} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.8. (Fakultät) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Fakultät $n!$ (auch genannt n faktorielle) ist rekursiv definiert durch $0! := 1$, $(n+1)! := (n+1)n!$.

Diskussion 1.2.9. (Geschlossene Darstellung) Äquivalenterweise kann man die folgende (geschlossene) Definition geben $n! := \prod_{j=1}^{n} j$. Beachte, dass nach Definition $\prod_{j=1}^{0} j = 1$. Damit gilt auch $0! = 1$ in der geschlossenen Darstellung.

1.3. **Binomischer Lehrsatz.**

Definition 1.3.1. Definition (Binomialkoeffizient)

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ ist rekursiv definiert durch:

(1) $\binom{0}{0} := 1$.
(2) $\binom{n}{k} := 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k < 0$ oder $k > n$.
(3) $\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$.

Lemma 1.3.2. (Geschlossene Darstellung der Binomialkoeffizienten)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Behauptung 1.3.3.

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{0} = 1$.
(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{n} = 1$.
(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n$ gilt $\binom{n}{1} = n$.

Beweis.

(1) Induktionsanfang: $\binom{0}{0} = 1$. Induktionsannahme: Es gelte $\binom{n}{0} = 1$.
Induktionsschritt: $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = 0 + 1 = 1$ (nach Definition und Induktionsannahme).
(2) Induktionsanfang: $\binom{0}{0} = 1$ nach Definition. Induktionsannahme: Es gelte $\binom{n}{n} = 1$.
Induktionsschritt: $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = 1$ (nach Definition und Induktionsannahme).
(3) Induktionsanfang: $\binom{1}{1} = 1$ nach Behauptung 1.3.3.(2). Induktionsannahme: Es gelte $\binom{n}{1} = 1$.
Induktionsschritt: $\binom{n+1}{1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n = n + 1$.

□

Bemerkung 1.3.4.

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!}$.
(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!n!}$.
(3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!}$.

Behauptung 1.3.5. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$ und $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $n = 2$, daher $k = 1$.

- (Version 1) Nach Definition, Behauptung 1.3.3.(1,2) gilt: $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$.
- (Version 2) Nach Behauptung 1.3.3.(3) gilt $\binom{2}{1} = 2$.

Induktionsannahme: Es gelte $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ für $1 \leq k \leq n-1$.

Induktionsschritt: Sei $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \text{ nach Definition} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \quad \text{nach Induktionsannahme} \\
&= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1).(n-k)!} \quad \text{Erweitern} \\
&= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \quad \text{Zusammenfassen der Brüche} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

□

Diskussion 1.3.6. Damit wird erhalten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!}.$$

Definition 1.3.7. (Binomialkoeffizient-Erweiterung) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!}.$$

Proposition 1.3.8. (Binomischer Lehrsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$. Andererseits $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Induktionsannahme: Es gelte

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}(a+b) = \sum_{j=0}^{n} \left(\binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&\text{Indexverschiebung i=j+1; L-v. umbenennen } \binom{n}{n+1} = 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} \\
&\binom{n}{-1} = 0; \text{ L-v. umbenennen} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a^i b^{n+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}.
\end{aligned}$$

Das beweist den binomischen Lehrsatz. □

2. AUSSAGENLOGIK

2.1. **Logische Operatoren.**

Definition 2.1.1. (Aussage) Eine Aussage ist eine Behauptung, die entweder zutrifft (wir sagen auch "sie ist wahr", oder "sie gilt") oder nicht (alternativ, "ist falsch", oder "sie gilt nicht").

Es gibt Aussagen, die wegen ihrer Struktur immer wahr, oder immer falsch, sind. Im Allgemeinen beschäftigt sich die Aussagenlogik mit der Gültigkeit von Aussagen im Bezug auf ihre Struktur. Betrachte die folgenden Beispiele:

Beispiel 2.1.2.

(1) Findus kommt zu Besuch oder Findus kommt nicht zu Besuch.
(2) Pettersson kommt heute zu Besuch und Pettersson kommt heute nicht zu Besuch.
(3) $2 > 5$, $2 < 5$
(4) Der Mond ist ein Planet. Der Mond ist kein Planet.
(5) Jeder Mensch in diesem Saal beherrscht 100 Sprachen.
(6) Es gibt eine Person im Saal, die weniger als 100 Sprachen beherrscht.
(7) Es gibt keinen Mensch, der 100 Sprachen beherrscht.

Definition 2.1.3. (Und $\wedge$, Oder $\vee$, Nicht $\neg$) Seien a und b Aussagen.

(1) Dann ist $a \wedge b$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn beide a und b wahr sind.
(2) Dann ist $a \vee b$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindenstens eine der beiden Aussagen wahr ist.
(3) Dann ist $\neg a$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn a falsch ist.

Um die Reihenfolge von Operatoren (Junktoren) zu bestimmen werden Klammern benutzt. Sonst bindet $\neg$ stärker als $\wedge$ und $\wedge$ stärker als $\vee$. Betrachte die folgenden Beispiele:

(1) (Das Wintersemester hat angefangen.) $\wedge (\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$ ist wahr.
(2) $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}) \wedge (\sqrt{2} \in \mathbb{R})$ ist wahr.
(3) $(2+5=7) \vee (\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$ ist wahr, obwohl $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
(4) $(2+5=8) \vee (\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$ ist falsch, da beide Aussagen falsch sind.
(5) $\neg(2+5=8) \vee (\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$ ist wahr.
(6) $\neg(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$ ist wahr
(7) $\neg((\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \vee (2+5=8))$ ist wahr.

Definition 2.1.4. (Implikation $\Rightarrow$, Äquivalenz $\Leftrightarrow$)
Seien a und b Aussagen.

- $(a \Rightarrow b) := (\neg a) \vee b$
- $(a \Leftrightarrow b) := (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

Ein Theorem (oder Satz) ist meist eine Aussage der Form *Voraussetzung* $\Rightarrow$ *Resultat*.

2.2. **Wahrheitstafeln.** Der Wahrheitswert von einer Aussage kann mit der Hilfe von Wahrheitstafeln überprüft werden.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$	$\neg(\neg a)$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
w	w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	f	w	w

Definition 2.2.1. (Aussagenvariable) Eine Aussagenvariable ist eine Unbekannte, die entweder wahr oder falsch ist. Da es sich nur um zwei mögliche Werte handelt, wird oft "wahr" mit 1 notiert, und "falsch" mit 0. Man spricht auch von binären Variablen.

Wir können die Aussagen als Bausteine verwenden und die Operationen Und ($\wedge$), Oder ($\vee$), Nicht ($\neg$), Implikation ($\Rightarrow$), Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) als Operatoren, um neue Aussagen zu konstruieren.

Definition 2.2.2. (Aussagenlogische Formel) Eine aussagenlogische Formel ist eine Zeichenkette, bestehend aus Aussagenvariablen, den logischen Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ und den Klammern "(", ")", die

- entweder aus genau einer Aussagenvariable besteht,
- oder die Form $(\neg a)$, $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \Rightarrow b)$, $(a \Leftrightarrow b)$ hat, wobei a und b bereits mit diesen Regeln konstruierter aussagenlogische Formel sind.

Diskussion 2.2.3. (Bewertung) Sei B die Sammlung aller Aussagenvariablen und sei $\mathscr{L} = \mathscr{L}(B)$ die entstehende Sammlung aller aussagenlogischer Formeln.

(1) Jede Funktion $S : B \to \{0,1\}$ wird Bewertung genannt.
(2) Für jede Bewertung S existiert genau eine Funktion

$$\bar{S} : \mathscr{L}(B) \to \{0,1\}$$

mit der Eigenschaft $S(a) = \bar{S}(a)$ für jede Aussagenvariable a.
(3) $\bar{S}$ wird auch Bewertung genannt.

Die Funktion $\bar{S}$ ist eine Erweiterung von S und ist eindeutig von S bestimmt.

Definition 2.2.4. (Äquivalenz aussagenlogischer Formeln) Zwei aussagenlogische Formeln α, β heißen äquivalent, oder gleich (Schreibweise $\alpha = \beta$), wenn für jede Bewertung S gilt

$$\bar{S}(\alpha) = \bar{S}(\beta).$$

Definition 2.2.5. (Tautologie, Widerspruch) Eine Tautologie ist eine Aussage, die immer (ohne Bezug auf die Wahrheitswerte anderer Aussagen) wahr ist. Eine Tautologie wird mit **1**, oder auch $\top$ bezeichnet. Ein Widerspruch (oder eine Kontradiktion) ist eine Aussage, die immer falsch ist. Ein Widerspruch wird mit **0**, oder auch $\perp$ bezeichnet.

2.3. **Rechenregeln der Aussagenlogik.**

Diskussion 2.3.1. (Doppelte Verneinungen) Doppelte Verneinungen fallen weg. Es gilt $\neg(\neg a) = a$.

a	$\neg a$	$\neg(\neg a)$
w	f	w
w	f	w
f	w	f
f	w	f

Theorem 2.3.2. *(Kommutativ-, Assoziativ-, Distirbutivgesetz) Für die Operationen $\wedge, \vee, \neg$ gelten*

(1) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
(2) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
(3) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Beweis. Mit der Hilfe einer Wahrheitstafel wird $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ überprüft:

a	b	c	$a \wedge b$	$b \wedge c$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Ähnlich können wir $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ überprüfen:

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

Theorem 2.3.3. *(Gesetz von De Morgan) Für Aussagen a und b gelten:*

(1) $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$
(2) $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$

Beweis.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$(\neg a)\wedge(\neg b)$	$(\neg a)\vee(\neg b)$	$\neg(a\vee b)$	$\neg(a\wedge b)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0

□

Theorem 2.3.4. *(Rechenregeln)*

(1) *Verschmelzungsgesetze:* $a\vee(b\wedge a)=a$, $a\wedge(b\vee a)=a$
(2) *Idempotenzgesetze:* $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$
(3) *Neutralitätsgesetze:* $a\vee\mathbf{0}=a$, $a\wedge\mathbf{1}=a$
(4) *Extremalgesetze:* $a\vee\mathbf{1}=\mathbf{1}$, $a\wedge\mathbf{0}=\mathbf{0}$
(5) *Komplimentaritätsgesetze:* $a\vee\neg a=\mathbf{1}$, $a\wedge\neg a=\mathbf{0}$
(6) *Dualitätsgesetze:* $\neg\mathbf{0}=\mathbf{1}$, $\neg\mathbf{1}=\mathbf{0}$
(7) *Doppelnegationsgsetz:* $\neg(\neg a)=a$,
(8) *Gesetze von De Morgan:* $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$, $\neg(a\wedge b)=\neg a\vee\neg b$.

Behauptung 2.3.5. (Umformulierung der Implikation) Es gilt $(p\Rightarrow q)=(\neg q\Rightarrow\neg p)$.

Beweis. Beweis

$$\begin{aligned}(p\Rightarrow q)&=(\neg p\vee q) &&\text{Definition}\\ &=(q\vee\neg p) &&\text{Kommutativität}\\ &=(\neg(\neg q)\vee\neg p) &&\text{Doppelnegation}\\ &=(\neg q\Rightarrow\neg p) &&\text{Definition}\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.6. Andererseits gelten weder $(p\Rightarrow q)=(\neg p\Rightarrow\neg q)$, noch $\neg(p\Rightarrow q)=(\neg p\Rightarrow\neg q)$.

Wenn für Aussagen p und q die Implikation $p\Rightarrow q$ gilt, heißt p *hinreichend* für q und q heißt *notwending* für p. Man beachte:

a) Wenn p gilt, dann gilt auch q.
b) Wenn q nicht wahr ist, dann kann es nicht sein, dass p gilt.

Proposition 2.3.7. Die folgende Aussagen sind Tautologien:

(1) $a\Rightarrow a$
(2) $(((\neg b)\Rightarrow b)\Rightarrow b)$
(3) $((a\Rightarrow b)\vee(b\Rightarrow a))$
(4) $(\neg(a\wedge(\neg a)))$

Beweis.

(1) $(a\Rightarrow a)=(\neg a\vee a)=\mathbf{1}$

(2)

$$\begin{aligned}(((\neg b) \Rightarrow b) \Rightarrow b) &= \neg((\neg b) \Rightarrow b) \vee b \\ &= \neg(\neg(\neg b) \vee b) \vee b) \\ &= \neg(b \vee b) \vee b \\ &= \neg b \vee b = \mathbf{1}\end{aligned}$$

(3) $((a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a)) = (\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee a) = \mathbf{1}$
(4) $(\neg(a \wedge (\neg a))) = (\neg a) \vee \neg(\neg a) = \neg a \vee a = \mathbf{1}$

□

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen Tautologien?
(1) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(2) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow \neg p$
(3) $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
(4) $p \vee (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

2.4. **Kontraposition, DNF, KNF.**

Diskussion 2.4.1. (Kontraposition) Seien p, q Aussagen. Da $(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$ gilt, wird

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Kontraposition (von $p \Rightarrow q$) genannt.

Lemma 2.4.2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$.

Beweis. (Beweis mittels Kontraposition) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist genügend zu beweisen, dass $2 \not| n \Rightarrow 2 \not| n^2$. Wenn $2 \not| n$, ist die Zahl n ungerade und damit existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k+1$. Dann ist $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ und $2 \not| n^2$. □

Definition 2.4.3. (disjunktive Normalform) Eine aussagenlogische Formel ist in disjunktiver Normalform, falls sie eine Disjunktion mehrerer Teilformeln ist, die wiederum alle eine Konjunktion von Aussagenvariablen und negierten Aussagenvariablen sind.

Beispiel 2.4.4. Seien p, q, r Aussagenvariablen. Dann sind die Formeln p, $p \vee \neg q$, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$, $(p \wedge q \wedge (\neg r)) \vee (\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$ in disjunktiver Normalform.

Theorem 2.4.5. *Sei α eine beliebige aussagenlogische Formel, die kein Widerspruch ist. Es existiert eine Formel α' in disjunktiver Normalform, so dass $\alpha = \alpha'$.*

Seien $a_1, \cdots, a_n$ alle Aussagenvariablen, die in α auftreten. Um α' zu konstruieren folgt man dem folgenden Algorithmus:

(1) Stelle die Wahrheitstafel von α mit den Aussagenvariablen links und den Wahrheitswerten von α rechts auf.
(2) Streiche alle Zeilen, in denen α den Wert 0 hat.

(3) Ordne jeder der verbliebenen Zeilen eine Und-Verknüpfung von allen Variablen a_i zu, die in dieser Zeile den Wert 1 haben und von den Negation $\neg a_j$ aller Variablen, die in dieser Zeile den Wert 0 haben.
(4) Die Aussage α' ist die Oder-Verknüpfung aller gerade konstruierten Und-Glieder.

Betrachte, die folgende Wahrheitstabelle.

a	b	c	α	$\vee$
0	0	0	1	$\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$
0	0	1	0	—
0	1	0	1	$\neg a \wedge b \wedge \neg c$
0	1	1	1	$\neg a \wedge b \wedge c$
1	0	0	1	$a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	0	—
1	1	0	0	—
1	1	1	1	$a \wedge b \wedge c$

Dann ist α' wie erwünscht, wobei

$$\alpha' = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c).$$

Definition 2.4.6. (konjunktive Normalform) Eine aussagenlogische Formel ist in konjunktiver Normalform, falls sie eine Konjunktion mehrerer Teilformeln ist, die wiederum alle eine Disjunktion von Aussagenvariablen und negierten Aussagenvariablen sind.

Beispiel 2.4.7. Seien p, q, r Aussagenvariablen. Dann sind die Formeln p, $p \wedge \neg q$, $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$, $(p \vee q \vee (\neg r)) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)$ in konjunktiver Normalform.

Theorem 2.4.8. *Sei α eine beliebige aussagenlogische Formel, die keine Tautologie ist. Es existiert eine Formel α' in konjunktiver Normalform, so dass $\alpha = \alpha'$.*

Seien $a_1, \cdots, a_n$ alle Aussagenvariablen, die in α auftreten. Um α' zu konstruieren folgt man dem folgenden Algorithmus:

(1) Stelle die Wahrheitstafel von α mit den Aussagenvariablen links und den Wahrheitswerten von α rechts auf.
(2) Streiche alle Zeilen, in denen α den Wert 1 hat.
(3) Ordne jeder der verbliebenen Zeilen eine Oder-Verknüpfung von allen Variablen a_i zu, die in dieser Zeile den Wert 0 haben und von den Negation $\neg a_j$ aller Variablen, die in dieser Zeile den Wert 1 haben.
(4) Die Aussage α' ist die Und-Verknüpfung aller gerade konstruierten Oder-Glieder.

Betrachte die folgende Wahrheitstabelle:

a	b	c	α	$\wedge$
0	0	0	0	$a \vee b \vee c$
0	0	1	0	$a \vee b \vee \neg c$
0	1	0	1	—
0	1	1	1	—
1	0	0	0	$\neg a \vee b \vee c$
1	0	1	0	$\neg a \vee b \vee \neg c$
1	1	0	1	—
1	1	1	1	—

Dann ist die Formel α' wie erwünscht, wobei

$$\alpha' = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c).$$

2.5. **Vollständige Teilsprachen.** Wir haben schon die Menge $\mathscr{L}$ aller aussagenlogischen Formel folgenderweise definiert: Eine aussagenlogische Formel ist eine Zeichenkette, bestehend aus Aussagenvariablen, den logischen Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ und den Klammern "(", ")", die entweder aus genau einer Aussagenvariable besteht, oder die Form $(\neg a)$, $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \Rightarrow b)$, $(a \Leftrightarrow b)$ hat, wobei a und b bereits mit diesen Regeln konstruierter aussagenlogische Formel sind. Jetzt betrachten wir Formeln, mit der Eigenschaft, dass sie (als Zeichenketten) nur ausgewählten Junktoren enthalten.

Definition 2.5.1.

(1) Sei $F \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ und sei $\mathscr{L}_F$ die Menge aller Formeln α aus $\mathscr{L}$ mit der folgenden Eigenschaft: Entweder ist α eine Aussagenvariable oder nur Operatoren aus F treten in α auf.
(2) $\mathscr{L}_F$ wird vollständig genannt, wenn für jede Formel $\alpha \in \mathscr{L}$ eine $\alpha' \in \mathscr{L}_F$ existiert, so dass $\alpha = \alpha'$.

Lemma 2.5.2. $\mathscr{L}_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$ ist vollständig.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathscr{L}$. Wenn $\alpha \neq \mathbf{1}$, ist die disjunktive Normalform von α in $\mathscr{L}_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$. Wenn $\alpha = \mathbf{1}$, dann $\alpha = (\neg(a \wedge (\neg a)))$ und $(\neg(a \wedge (\neg a))) \in \mathscr{L}_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$. □

Lemma 2.5.3. Die Mengen $\mathscr{L}_{\{\neg,\vee\}}$ und $\mathscr{L}_{\{\neg,\wedge\}}$ sind vollständig.

Beachte, dass $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$ und $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$ gelten und betrachte jetzt eine beliebige Formel α. Man kann die Struktur der Formel α benutzen um tatsächlich die Existenz von Formeln $\alpha' \in \mathscr{L}_{\{\neg,\vee\}}$ und $\alpha'' \in \mathscr{L}_{\{\neg,\wedge\}}$ mit der Eigenschaft $\alpha = \alpha'$ and $\alpha = \alpha''$ zu beweisen.

Lemma 2.5.4. Sei $\alpha \in \mathscr{L}_{\{\neg\}}$. Es gilt $\alpha \neq \mathbf{1}$ und daher ist $\mathscr{L}_{\neg}$ nicht vollständig.

Ein weiteres interessantes Beispiel ist der Nicht-Und Operator, der folgenderweise definiert ist. Seien a, b Aussagenvariablen und sei $(a|b) := \neg(a \wedge b)$. Sei $\mathscr{L}_{\{|\}}$ die Menge aller Zeichenketten α bestehend aus Aussagenvariablen, dem Zeichen $|$ und den Klammern "(","\)" mit der Eigenschaft, dass

- entweder α eine Aussagenvariable ist,
- oder $\alpha = (\beta|\gamma)$, wobei β, γ dieselbe Regeln erfüllen.

Man kann beweisen, das für jede $\alpha \in \mathscr{L}$ existiert $\alpha' \in \mathscr{L}_{\{|\}}$, so dass $\alpha = \alpha'$.

3. Prädikatenlogik

3.1. **Aussageformen.** Betrachte die Ungleichungen $2 > 5$, $x > 5$, wobei x eine Unbekannte ist. Der Wahrheitswert der ersten Aussage ist falsch. Der Wahrheitswert der zweiten Ungleichung hängt von x ab. Wenn $x \in (-\infty, 5]$ ist die Ungleichung falsch und wenn $x \in (5, \infty)$ ist die Ungleichung wahr. Diese Situation entspricht dem Begriff einer Aussageform. Nach Definition ist eine Aussageform, oder ein Prädikat, eine Aussage, die Unbekannte aus einer bestimmten Menge enthält. Zum Beispiel:

- $n = 2k$, wobei $n, k \in \mathbb{N}$
- $x^2 = 2$, wobei $x \in \mathbb{R}$

Um zu betonen, dass x eine Unbekannte einer gegebenen Aussageform φ ist, schreiben wir $\varphi(x)$. Die Variable x wird *frei* in φ genannt. Eine Aussageform kann von mehreren Unbekannten abhängen. In dem Fall sind alle Unbekannten aufzuzählen. Zum Beispiel ist $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ eine Aussageform, die von den Unbekannten $x_1, \cdots, x_n$ abhängt. Man beachte, immer wenn x einen bestimmten Wert hat, bzw. wenn alle $x_1, \cdots, x_n$ spezifische Werte annehmen, ist die Aussageform entweder wahr oder falsch.

3.2. **Der Allquantor.** Der Allquantor $\forall$ wird benutzt um eine Behauptung bezüglich aller Objekte einer Menge (oder einer Klasse) zu machen. Zum Beispiel $\forall x \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [6, \infty) : x > 5$, $\forall x \in \mathbb{R} : x > 5$, $\forall x \in 2\mathbb{N} : \forall y \in 2\mathbb{N} : 2|(x+y)$. Der Allquantor bezieht sich auf eine Variable und ein Prädikat, das dahinter steht. Der Allquantor *bindet* die freie Variable. Man beachte, dass statt $\forall x_1 : \forall x_2 : \varphi(x_1, x_2)$ oft $\forall x_1, x_2 : \varphi(x_1, x_2)$ geschrieben wird. Eine weitere Eigenschaft ist die Äquivalenz der folgenden Aussagen

$$\forall x_1 : \forall x_2 : \varphi(x_1, x_2) \text{ und } \forall x_2 : \forall x_1 : \varphi(x_1, x_2).$$

Man soll auch erwähnen, das dasselbe auch für mehrere Variablen gilt.Es ist aber wichtig zu betonen, dass

$$\forall x \in (3, \infty) : \forall y \in \{1, 2\} : \frac{x}{y} > 1$$

nicht dasselbe wie

$$\forall y \in (3, \infty) : \forall x \in \{1, 2\} : \frac{x}{y} > 1$$

ist. Stattdessen ist die erste Formel äquivalent zu

$$\forall y \in \{1, 2\} : \forall x \in (3, \infty) : \frac{x}{y} > 1$$

Beispiel 3.2.1. Das Prinzip der vollständigen Induktion zum Beweis einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$(A(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n+1)))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$

Beispiel 3.2.2. Um eine Allausage zu widerlegen, genügt die Angabe eines Gegenbeispieles:

(1) $2 \in \mathbb{R}$ und $2 \leq 5$, damit ist die Allausage $\forall x \in \mathbb{R} : x > 5$ falsch.
(2) $1, 2$ sind natürlichen Zahlen, deren Summe eine ungerade Zahl ist, was die Allausage

$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : 2|(x+y)$$

widerlegt.

3.3. **Der Existenzquantor.** Die Existenz eines bestimmtes Objektes kann mit Hilfe des Existenzquantors ausgedrückt werden:

$$\exists x : \varphi(x)$$

Um die Existenz genau eines solchen Objekt zu behaupten, wird

$$\exists! x : \varphi(x)$$

benutzt. Der Existenzquantor bezieht sich auf eine Variable und ein Prädikat, das dahinter steht. Wir sagen, dass der Quantor die freie Variable *bindet*. Um die Existenz eines Elementes einer Menge zu behaupten (Element mit gewissen Eigenschaften) wird die Schreibweise

$$\exists x \in M : \varphi(x)$$

verwendet und um die Existenz genau eines Elementes einer Menge zu behaupten wird die Schreibweise

$$\exists! x \in M : \varphi(x)$$

verwendet. Mann kann mehrere aufeinander folgende Existenzquantoren vertauschen, da die entsprechenden Aussagen äquivalent sind. Damit kann man statt

$$\exists a : \exists b : \psi(a,b) \text{ oder } \exists b : \exists a : \psi(a,b)$$

auch

$$\exists a,b : \psi(a,b)$$

schreiben. Es ist aber zu betonen, dass

$$\exists a \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \exists b \in \mathbb{R} : b = \frac{1}{a}$$

nicht dasselbe wie

$$\exists b \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : \exists a \in \mathbb{R} : b = \frac{1}{a}$$

ist. Stattdessen ist die erste Aussage äquivlaent zu

$$\exists b \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : b = \frac{1}{a}$$

Diskussion 3.3.1. Die Verneinung einer Existenzaussage ist eine Allausage und umgekehrt. Zum Beispiel: Die Verneinung von “Alle Minions sind glücklich.” ist “Es gibt ein Minion, das nicht glücklich ist.” und die Verneinung von “Alle Aufgaben sind interessant.” ist “Es gibt eine Aufgabe, die nicht interessant ist.” Im Zeichen ausgedrückt, gilt:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x),$$

wenn A eine Aussage über Elemente von M ist. Für die Existenzquantoren gilt:

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x).$$

Man beachte, dass das Vertauschen von Existenz- und Allquantor verboten ist! Die Aussage

$$\exists r \in \mathbb{R} : \forall z \in (0,1) : z < r$$

ist wahr, während die Aussage

$$\forall r \in \mathbb{R} : \exists z \in (0,1) : z < r$$

falsch ist. Tatsächlich, genügt es $f = -5$ zu betrachten.

Aufgabe 2. Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(1) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$,
(2) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y$,
(3) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$,
(4) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$,
(5) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$,
(6) $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$.

3.4. **Rechenregeln für Quantoren.**

Theorem 3.4.1. *(Rechenregeln für Quantoren) Seien $P(x)$ und $Q(x)$ Prädikate, die von der freien Variable x abhängen, und sei q eine Aussage, die nicht von x abhängt. Dann gilt:*

(1) $\neg(\forall x : P(x)) = \exists x : \neg P(x)$,
(2) $\neg(\exists x : P(x)) = \forall x : \neg P(x)$,
(3) $\exists x : P(x) \vee Q(x) = (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$,
(4) $\forall x : P(x) \wedge Q(x) = (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$
(5) $\forall x : q \vee P(x) = q \vee (\forall x : P(x))$
(6) $\exists x : q \wedge P(x) = q \wedge \exists x : P(x)$
(7) $(\forall x : P(x)) \Rightarrow q = \exists x : (P(x) \Rightarrow q)$
(8) $(\exists x : P(x)) \Rightarrow q = \forall x : (P(x) \Rightarrow q)$
(9) $q \Rightarrow (\forall x : P(x)) = \forall x : (q \Rightarrow P(x))$
(10) $q \Rightarrow (\exists x : P(x)) = \exists x : (q \Rightarrow P(x))$.

Beweis. (3) Zu zeigen $(\exists x : P(x) \vee Q(x)) = (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$

($\Rightarrow$) Sei a mit $P(a) \vee Q(a)$ wahr. Dann ist $P(a)$ wahr oder ist $Q(a)$ wahr. Im ersten Fall ist $(\exists x : P(x))$ wahr, im zweiten Fall ist $(\exists x : Q(x))$ wahr. Auf jeden Fall ist die Disjunktion $(\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$ wahr.

($\Leftarrow$) Nehmen wir jetzt an, dass $(\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$ gilt. Nach Definition von $\vee$ ist eine der Existenzaussagen $(\exists x : P(x))$ oder $(\exists x : Q(x))$ wahr. O.b.d.A. gibt es ein a, so dass $P(a)$ gilt. Dann gilt aber auch $P(a) \vee Q(a)$ und damit auch $\exists x : P(x) \vee Q(x)$.

(4) Zu zeigen $\forall x : P(x) \wedge Q(x) = (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$

($\Rightarrow$) Angenommen $\forall x : P(x) \wedge Q(x)$ gilt. Sei a beliebig. Dann ist $P(a) \wedge Q(a)$ wahr. Damit nach Definition von $\wedge$ sind $P(a)$, $Q(a)$ wahr. Da a beliebig war, sind auch $(\forall x : P(x))$ und $(\forall x : Q(x))$ wahr. Nach der Definition von $\wedge$ ist die rechte Seite der Gleichheit wahr.

($\Leftarrow$) Angenommen die rechte Seite ist wahr. Sei a beliebig. Dann sind $P(a)$ und $Q(a)$ wahr, und damit ist $P(a) \wedge Q(a)$ wahr. Daher $(\forall x : P(x) \wedge Q(x))$ gilt.

(5) Zu zeigen $\forall x : q \vee P(x) = q \vee (\forall x : P(x))$

($\Rightarrow$) Angenommen $\forall x : q \vee P(x)$ gilt. Sei a beliebig. Dann gilt $q \vee P(a)$. Nach Definition ist q wahr oder ist $P(a)$ wahr. Wenn q wahr ist, dann ist auch $q \vee (\forall x : P(x))$ wahr. Wenn q nicht wahr ist, dann ist $P(a)$ wahr für jedes a. Daher ist $(\forall x : P(x))$ wahr und damit auch $q \vee (\forall x : P(x))$.

($\Leftarrow$) Nehmen wir als nächstes an, dass $q \vee (\forall x : P(x))$ gilt. Wenn q gilt, dann gilt $q \vee P(a)$ für jedes a, und ist $(\forall x : q \vee P(x))$ wahr. Wenn q falsch ist, dann gilt $(\forall x : P(x))$ und damit ist für jedes a, $q \vee P(a)$ wahr. Daher ist auch $(\forall x : q \vee P(x))$ wahr.

(6) Zu zeigen $\exists x : q \wedge P(x) = q \wedge \exists x : P(x)$

($\Rightarrow$) Angenommen $\exists x : q \wedge P(x)$ gilt. Es gibt a, so dass $q \wedge P(a)$ gilt. Nach $\wedge$-Definition gelten q und $P(a)$. Dann aber gilt auch $\exists x : P(x)$ und damit ist $q \wedge \exists x : P(x)$ wahr.

($\Leftarrow$) Angenommen $q \wedge (\exists x : P(x))$ gilt. Nach $\wedge$-Definition sind q und $(\exists x : P(x))$ wahr. Sei a, so dass $P(a)$ wahr ist. Dann ist auch $q \wedge P(a)$ wahr und damit gilt $\exists x : (q \wedge P(x))$.

(7) Zu zeigen $(\forall x : P(x)) \Rightarrow q = \exists x : (P(x) \Rightarrow q)$

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass $(\forall x : P(x)) \Rightarrow q$. Wenn q wahr ist, dann ist für jedes a auch $P(a) \Rightarrow q$ wahr, da der Wahrheitswert von $P(a)$ irrelevant ist. Insbesondere ist $P(a) \Rightarrow q$ wahr, wobei a fixiert ist. Damit gilt $\exists x : (P(x) \Rightarrow q)$. Wenn q falsch ist, dann ist $\neg(\forall x : P(x))$ wahr. Damit gilt $\exists x : \neg P(x)$. Sei $\neg P(a)$ wahr, wobei a fixiert ist. Dann ist $\neg P(a) \vee q = P(a) \Rightarrow q$ wahr und damit gilt $\exists x : (P(x) \Rightarrow q)$.

($\Leftarrow$) Angenommen $\exists x : (P(x) \Rightarrow q)$ gilt. Es gibt a, so dass $P(a) \Rightarrow q$ gilt. D.h. $\neg P(a) \vee q$ ist wahr und damit gilt $(\exists x : \neg P(x)) \vee q$. Allerdings $(\exists x : \neg P(x)) = \neg(\forall x : P(x))$. Damit ergibt sich $(\forall x : P(x)) \Rightarrow q$.

(8) Zu zeigen $(\exists x : P(x)) \Rightarrow q = \forall x : (P(x) \Rightarrow q)$

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass $(\exists x : P(x)) \Rightarrow q$. Wenn q wahr ist, dann ist auch $P(a) \Rightarrow q$ für jedes a wahr, da der Wahrheitswert von $P(a)$ irrelevant ist. Damit ist $\forall x : (P(x) \Rightarrow q)$ wahr. Wenn q nicht wahr ist, dann ist $\neg(\exists x : P(x))$ wahr. Allerdings $\neg(\exists x : P(x)) = (\forall x : \neg P(x))$. Sei a beliebig. Dann ist $\neg P(a)$ wahr und daher ist auch $\neg P(a) \vee q = P(a) \Rightarrow q$ wahr. Da a beliebig ist, wird auch $\forall x : (P(x) \Rightarrow q)$ erhalten.

($\Leftarrow$) Angenommen $\forall x : (P(x) \Rightarrow q)$ gilt. Wenn q wahr ist, ist auch $(\exists x : P(x)) \Rightarrow q$ wahr, da der Wahrheitswert von $(\exists x : P(x))$ irrelevant ist. Wenn q nicht wahr ist, dann ist $\neg P(a)$ wahr für jedes a. D.h. $\forall x : \neg P(x)$ ist wahr. Allerdings $\forall x : \neg P(x) = \neg(\exists x : P(x))$ und damit ist $\neg(\exists x : P(x)) \vee q$ wahr. Das ergibt $(\exists x : P(x)) \Rightarrow q$.

(9) Zu zeigen $q \Rightarrow (\forall x : P(x)) = \forall x : (q \Rightarrow P(x))$

($\Rightarrow$) Wir nehmen an, dass $q \Rightarrow (\forall x : P(x))$ gilt. Wenn q wahr ist, dann ist $\forall x : P(x)$ wahr. Damit gilt $P(a)$ für jedes a und daher gilt $\neg q \vee P(a) = q \Rightarrow P(a)$ auch. Das ergibt $\forall x : (q \Rightarrow P(x))$ gilt.

($\Leftarrow$) Angenommen $\forall x : (q \Rightarrow P(x))$ gilt. Wenn q falsch ist, ist $\neg q$ wahr und damit gilt $\neg q \vee (\forall x : P(x)) = q \Rightarrow (\forall x : P(x))$. Wenn q wahr ist, ist nach Annahme $P(a)$ wahr für jedes a. Dann ist $\forall x : P(x)$ wahr und damit gilt $q \Rightarrow (\forall x : P(x))$. □

4. Mengenlehre

4.1. **Mengen.** *"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung S von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von S genannt werden) zu einem ganzen."* G. Cantor (1845-1918)

Einige Beispiele, die wir bis zu diesem Zeitpunk betrachtet haben:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- Die Menge aller geraden, natürlichen Zahlen.
- Die Menge aller ungeraden, natürlichen Zahlen.
- Die Menge aller Primzahlen.
- Die Menge mit genau zwei Elementen, die Zahlen 0 und 1.
- Die Menge aller aussagenlogischen Formeln.
- Die Menge $\mathscr{L}_{\{\neg,\vee,\wedge\}}$.
- Menge der Restklassen modulo n, $\mathbb{Z}_n$.
- Die Menge aller Bewertungen einer aussagenlogischen Formel.

Wie kann man eine Menge angeben? Alle Elemente einer endlichen Mengen kann man aufzählen um die Menge zu definieren. Zum Beispiel $\{0,1\}$, $\{2,3,5,7\}$. Andererseits können wir eine Menge dadurch definieren, dass wir Eigenschaften ihrer Elemente angeben:

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p > 1 \wedge \forall m \in \mathbb{N} : (m|p \Rightarrow (m = 1 \vee m = p))\}$$

Das Symbol $\in$ kennen wir schon. Trotzdem wiederholen wir nochmals: Die Elementbeziehung wird $\in$ bezeichnet. Man spricht "*a* ist ein Element von *M*": $0 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definition 4.1.1. Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Das heißt

$$A = B \text{ genau dann wenn } \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Definition 4.1.2. Die leere Menge ist die Menge, die kein Element enthält. Sie wird durch $\emptyset$ bezeichnet.

Formal kann man die leere Menge folgenderweise definieren, $\emptyset := \{x : x \neq x\}$.

Definition 4.1.3. Seien A, B Mengen. Die Menge A ist eine Teilmenge von B genau dann wenn jedes Element a von A ein Element in B ist. Formal

$$A \subseteq B \text{ genau dann wenn } \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Die Menge B heißt Obermenge von A.

Wir kennen schon viele Beispiele: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $\{0,1\} \subseteq \mathbb{N}$.

Lemma 4.1.4. Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Formal aufgeschrieben:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen $A = B$. Sei $a \in A$. Da $A = B$ ist, ist $a \in B$ und damit ist $A \subseteq B$. Sei $b \in B$. Da $B = A$ ist, ist $b \in A$ und damit ist $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Zu zeigen ist, dass A und B genau dieselben Elemente enthalten. Es ist genügend zu zeigen, dass

$$\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Sei $x \in A$. Wegen $A \subseteq B$, gilt $x \in B$. Das heißt $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$. Ähnlich folgt aus $B \subseteq A$, dass $\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A$. Fassen wir die beiden Implikationen zusammen erhalten wir die erwünschte Äquivalenz. $\square$

Man beachte, dass die leere Menge, eine Teilmenge jeder Menge ist. Auch ist jede Menge eine Teilmenge von sich selbst. Damit werden die leere Menge und die Menge selbst, tirivialen Teilmenge einer Menge. Alle Teilmengen, die ungleich der Menge selbst sind, nennt man echte Teilmengen. Wir verwenden das folgende Schreibweise, um eine Teilmenge zu bezeichnen: $B \subset A$ oder $B \subsetneq A$..

4.2. **Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement.**

Definition 4.2.1. Seien A und B Mengen. Die Vereinigungsmenge von A und B ist definiert als die Menge, die aus allen Elementen von A und allen Elementen von B besteht. Formal

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

Definition 4.2.2. (Vereinigung einer Familie)

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $I := \{1, 2, \cdots, n\}$ eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge. Die Vereinigung $A_1 \cup \cdots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ von $A_1, \cdots, A_n$ besteht definitionsgemäß aus allen Elementen, die in (mindestens) einer der Mengen A_i enthalten sind. Schreibweise:

$$\begin{aligned} A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\} \\ &= \{x| \mid \exists i : 1 \leq i \leq n \text{ so dass } x \in A_i\}. \end{aligned}$$

(2) Sei I eine beliebige Indexmenge und $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Mengenfamilie, d.h. für jedes $i \in I$ ist A_i eine Menge. Dann definieren wir durch

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

die Vereinigung aller A_i. Das bedeutet, $\bigcup_{i \in I} A_i$ besteht aus allen Elementen, die in mindestens einer der Mengen A_i enthalten sind.

Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

(1) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
(2) $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
(3) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-n, n] = \mathbb{R}$, wobei $[-n, n]$ das geschlossene Intervall aller reellen Zahlen r, so dass $-n \leq r \leq n$, bezeichnet.
(4) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller aussagenlogischen Formeln, die als Zeichenkette aus höchstens n Zeichen bestehen. Wir nehmen an, dass jede Aussagenvariable genau einem Zeichen entspricht! Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln.
(5) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$

Eine weitere wichtige Mengenoperation ist *der Durchschnitt*.

Definition 4.2.3. (Durchschnitt)

(1) Seien A und B Mengen. Die Durchschnittsmenge von A und B ist definiert als die Menge, die aus allen Elementen besteht, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Man bezeichnet die Durchschnittsmenge $A \cap B$. Formal ist sie definiert durch

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

(2) Haben A und B leeren Durchschnitt, $A \cap B = \emptyset$, so sagen wir, A und B sind disjunkt.

Man kann auch den Durchschnitt einer beliebigen Familie von Mengen definieren:

Definition 4.2.4. (Beliebiger Durchschnitt) Sei $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Solche Familien werden auch mit $A_i, i \in I$ oder $\{A_i \mid i \in I\}$ bezeichnet. Der Durchschnitt aller A_i ist definiert als die Menge aller jenen Elemente, die in allen Mengen A_i liegen. Formal:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in A : x \in A_i\}.$$

Zum Beispiel:

(1) $\{1,2,6\} \cap \{3,6\} = \{6\}$
(2) $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
(3) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-n,n] = \{0\}$
(4) $\bigcap_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} [-r,r] = \{0\}$
(5) $\bigcap_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} (-r,r) = \emptyset$

Eine weitere wichtige Mengenoperation ist *die Mengendifferenz*.

Definition 4.2.5. (Mengendifferenz) Seien A und B zwei Mengen. Die Mengendifferenz $A \backslash B$ (sprich: A ohne B) ist die Menge aller Elemente von A, die nicht in B sind. Formal

$$A \backslash B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Betrachten Sie die Beispiele:

- Seien $A = \{3,6,7\}$, $B = \{7,8,10\}$. Dann ist $A \backslash B = \{3,6\}$.
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n,n\}) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n,n+1)) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-(n+1),-n))$

Seien A und B zwei Mengen. Man kann genau diese Elemente betrachten, die in nur eine der beiden Mengen enthalten sind.

Definition 4.2.6. (Symmetrische Mengendifferenz) Seien A und B Mengen. Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ besteht definitionsgemäß aus allen Elementen der Menge A, die nicht in B enthalten sind und allen Elemente der Menge B, die nicht in A enthalten sind. Formal

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Zum Beispiel: Seien $A = \{2,3,6\}$ und $B = \{2,5,7\}$. Dann ist $A \triangle B = \{3,6\} \cup \{5,7\} = \{3,6,5,7\}$.
Ein besonderer Fall der obigen Definition ist durch den Begriff *Komplement* angegeben.

Definition 4.2.7. (Komplement) Sei A eine Teilmenge der Menge U. Das Komplement ist

$$\bar{A}^U := \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Sei $A \subseteq U$. Beachte, dass $\bar{A}^U = U \backslash A$. Die folgenden Schreibweisen werden auch verwendet

$$A^c, A',$$

wann immer die Menge U aus dem Kontext bekannt ist.

Theorem 4.2.8. *(Rechenregeln)*
Seien A, B, C Teilmengen der Menge U. Dann gelten:

(1) *Kommutativgesetze:* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
(2) *Assoziativgesetze:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, *und* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
(3) *Distributivgesetze:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *und* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(4) *Verschmelzungsgesetze:* $A \cup (B \cap A) = A$, $A \cap (B \cup A) = A$
(5) *Idempotenzgesetze:* $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
(6) *Neutralitätsgesetze:* $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$
(7) *Extremalgesetze:* $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
(8) *Komplimentaritätsgesetze:* $A \cup (U \setminus A) = U$, $A \cap (U \setminus A) = \emptyset$
(9) *Dualitätsgesetze:* $U \setminus \emptyset = U$, $U \setminus U = \emptyset$.
(10) *Doppelnegationsgesetz:* $(U \setminus (U \setminus A)) = A$
(11) *Gesetze von De Morgan:* $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$ *und* $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

Beweis. Wir beweisen ausführlich in diesem Vorlesungsskript nur das erste Distributivgesetz und die Gesetzte von De Morgan. Alle weiteren Regeln wurden ausführlich währende der Vorlesung besprochen. Also, zu zeigen ist, dass $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ gilt. Beachte:

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Als nächstes beweisen wir, dass $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$ gilt. Man beachte

$$\begin{aligned}
x \in U \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow (x \in U) \wedge \neg (x \in (A \cup B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in U) \wedge \neg (x \in A \vee x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in U) \wedge (\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in U) \wedge (x \in U) \wedge (\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in U \wedge \neg (x \in A)) \wedge (x \in U \wedge \neg (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in U \setminus A) \wedge (x \in U \setminus B) \\
&\Leftrightarrow x \in (U \setminus A) \cap (U \setminus B).
\end{aligned}$$

Das zweite Gesetz von De Morgan $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$ wird ähnlich bewiesen:

$$\begin{aligned}
x \in U\backslash(A\cap B) &\Leftrightarrow (x\in U)\wedge\neg(x\in(A\cap B))\\
&\Leftrightarrow (x\in U)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\
&\Leftrightarrow (x\in U)\wedge(\neg(x\in A)\vee\neg(x\in B))\\
&\Leftrightarrow ((x\in U)\wedge\neg(x\in A))\vee(x\in U\wedge\neg(x\in B))\\
&\Leftrightarrow (x\in U\backslash A)\vee(x\in U\backslash B)\\
&\Leftrightarrow x\in(U\backslash A)\cup(U\backslash B).
\end{aligned}$$

□

4.3. **Potenzmenge, Produktmenge.**

Definition 4.3.1. (Potenzmenge) Sei M eine Menge. Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ von M ist definiert als die Menge aller Teilmengen von M.

Betrachten Sie die folgenden Beispiele

(1) Sei $M=\{1,2,3\}$. Dann ist $\mathscr{P}(M)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Beachte M hat 3 Elemente und $\mathscr{P}(M)$ hat $2^3=8$ Elemente.
(2) Die Potenzmenge der leeren Menge ist die Menge, die nur die leere Menge enthält, $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$.

Eine weitere Mengenoperation ist das Mengenprodukt.

Definition 4.3.2. (Mengenprodukt)

(1) Seien A, B Mengen. Die Produktmenge $A\times B$, auch genannt das Cartesische Produkt von A und B, ist die Menge aller geordneten Paare (a,b) bestehend aus Elementen von A und B, formal
$$A\times B := \{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}.$$
(2) Seien $M_1,\cdots,M_k$ Mengen. Die Produktmenge $M_1\times M_2\times\cdots\times M_k$, genannt auch das Cartesische Produkt der $\{M_i\}_{i=1,\cdots,k}$, ist die Menge aller geordneten k-Tupel $(m_1,\cdots,m_k)$ mit $m_i\in M_i$ für $i=1,\ldots,k$. Formal
$$\prod_{i=1}^{k} M_i=\{(m_1,\cdots,m_k)\mid\forall i: m_i\in M_i\}.$$
(3) Ist $M_i=A$ für alle $i=1,\cdots,k$, so schreiben wir statt $A\times\cdots\times A$ kurz A^k.

Betrachte, die Beispiele:

(1) Seien $A=\{1,2,3\}$ und $B=\{a,b\}$. Bestimmen Sie alle Elemente von A^2, A^3 und $A\times B$.
(2) $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$
(3) $\mathbb{N}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\}$
(4) $\mathbb{N}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{N},y\in\mathbb{R}\}$
(5) $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},1\le i\le n\}$.
(6) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}\mathbb{N}^k$
(7) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}\mathbb{R}^n$

5. Relationen

5.1. Äquivalenzrelationen.

Definition 5.1.1. Definition Seien M und N Mengen. Eine Relation zwischen M und N ist eine Teilmenge R des Cartesischen Produkts, d.h. $R \subseteq M \times N$. Für zwei Elemente $a \in M$ und $b \in N$ sagen wir: a steht in Relation mit b, falls $(a,b) \in R$ gilt.

Schreibweise: aRb, $\neg(aRb)$, $a \not R b$

Wenn $M = N$, wird R eine Relation auf M genannt.

Definition 5.1.2. (Transitivität, Reflexivität) Sei R einer Relation auf einer Menge M.

(1) R heißt transitiv, wenn für alle $a,b,c \in M$ gilt, dass $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.
(2) R heißt reflexiv, wenn für alle $a \in M$ gilt, dass aRa.

Man beachte, dass die natürliche Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ eine reflexive Relation ist. Andererseits ist die natürliche Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation, die nicht reflexiv ist und Beide Relationen sind transitiv.

Definition 5.1.3. (Äquivalenzrelation) Eine reflexive und transitive Relation $\sim$ auf einer Menge M heißt Äquivalenzrelation, falls sie zusätzlich symmetrisch ist, d.h. dass

$$\forall x,y \in M : (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$$

gilt. Wenn $x \sim y$, werden x und y äquivalent genannt.

Definition 5.1.4. (Äquivalenzklasse) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und sei $a \in M$. Die Äquivalenzklasse von a ist definiert, als die Menge aller Elemente von M, die in Relation mit a stehen. Schreibweise:

$$C_a := \{b \in M \mid a \sim b\}.$$

Andere Notationen für C_a sind $\bar{a}$ und $[a]$.

Proposition 5.1.5. (Eigenschaften von Äquivalenzen) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:

(1) für jedes $a \in M$ ist $C_a \neq \emptyset$.
(2) $\bigcup_{a \in M} C_a = M$.
(3) $C_a \cap C_b \neq \emptyset \Leftrightarrow C_a = C_b$ für alle $a,b \in M$.

Beweis. Sei $a \in M$. Dann ist $a \sim a$ wegen Reflexivität und damit $a \in C_a$. Das heißt, dass $C_a \neq \emptyset$. Nach Definition ist $C_a \subseteq M$ für jedes $a \in M$ und damit ist $\bigcup_{a \in M} C_a \subseteq M$. Sei $a \in M$. Laut (1) ist $a \in C_a$. Das ergibt $M \subseteq \bigcup_{a \in M} C_a$ und damit $M = \bigcup_{a \in M} C_a$. Als nächstes werden wir die dritte Eigenschaft beweisen, nämlich dass $C_a \cap C_b \neq \emptyset \Leftrightarrow C_a = C_b$ für alle $a,b \in M$ gilt. Sei a,b beliebig mit $C_a \cap C_b \neq \emptyset$. Zu zeigen ist $C_a \subseteq C_b$ und $C_b \subseteq C_a$. Sei $d \in C_a \cap C_b$. <u>Zu zeigen $C_a \subseteq C_b$</u>: Sei $c \in C_a$. Daher $c \sim d$ und $d \sim b$. Aus der Transitivität von $\sim$ folgt $c \sim b$ und nach der Definition von C_b ist $c \in C_b$. <u>Zu zeigen $C_b \subseteq C_a$</u>: Sei $c \in C_b$. Daher $c \sim d$ und $d \sim a$. Aus der Transitivität von $\sim$ folgt $c \sim a$ und nach der Definition von C_a ist $c \in C_a$. Andererseits nehmen wir an, dass $C_a = C_b$ gilt. Dann ist $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, da nach Definition $a \in C_a$ gilt. $\square$

Wir werden oft die folgende Notation verwenden: Für jedes $i \in I$ sei U_i eine Menge. Die Mengenfamilie $\{U_i \mid i \in I\}$ wird auch mit $\{U_i\}_{i\in I}$ bezeichnet. Betrachte jetzt eine beliebige Menge M und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für jedes $a \in M$, sei C_a die Äquivalenzklasse von a. Beachte: Immer wenn $a \sim b$, dann ist $C_a = C_b$. Daher tritt jede Äquivalenzklasse in der Aufzählung $\{(a, C_a) : a \in A\}$ möglicherweise mehr als einmal als zweite Koordinate eines geordnetes Paares (a, C_a) auf! Eigentlich passiert das immer wenn C_a mehr als ein Element enthält. Allerdings können wir eine Aufzählung $\{U_i\}_{i\in I}$ der Äquivalenzklassen betrachten, in der jede Äquivalenzklasse nur einmal vorkommt. Das heißt, dass es für jedes $a \in M$ genau ein $i \in I$ mit $a \in U_i$ gibt. Diese Tatsache führt uns zum folgenden Begriff:

Definition 5.1.6. (Faktormenge) Sei M eine Menge und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ wird Faktormenge oder Quotientenmenge genannt und wird durch $M/\sim$ bezeichnet.

Lemma 5.1.7. Sei $(M/\sim)$ die Faktormenge von einer Menge M bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Dann gilt $\forall a \in M : \exists U \in (M/\sim) : a \in U$.

Beweis. Sei $a \in M$. Dann $a \in C_a$. Es gibt nach Definition $U \in (M/\sim)$ mit $C_a = U$ und damit $a \in U$ wie erwünscht. $\square$

Die Elemente der Faktormenge $M/\sim$ einer Menge M sind disjunkte, nicht leere Teilmengen von M, deren Vereinigung die Menge M überdeckt. Diese Tatsache ist interessant ohne Bezug auf eine Äquivalenzrelation und ist eng zusammengebunden mit dem folgenden Begriff:

Definition 5.1.8. (Partition) Sei M eine Menge und $\mathscr{F} := \{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M (*Manchmal wird auch die Schreibweise* $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(M)$ *verwendet.*) Die Familie $\mathscr{F}$ heißt eine Partition von M, falls die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(1) $\forall i \in I : U_i \neq \emptyset$
(2) $\bigcup_{i\in I} U_i = M$
(3) $\forall i, j \in I : U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j$.

Man beachte: Das Eigenschaft (2) sorgt dafür, dass jedes Element von M in mindestens einem Element von $\mathscr{F}$ liegt und Eigenschaft (3) sorgt dafür, dass jedes Element von M in höchstens einem Element von $\mathscr{F}$ liegt. Wir sprechen von einer disjunkten Vereinigung, auch von einer disjunkten Überdeckung von M.

Theorem 5.1.9. *(Äquivalenzrelationen und Partitionen)*
Sei M eine Menge. Jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf M induziert eine Partition von M und umgekehrt induziert jede Partition von M eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Aufzählung der Elemente der Faktormenge $M/\sim$. Wir haben schon gezeigt, dass $\forall i \in I : U_i \neq \emptyset$ und $\bigcup_{i\in I} U_i = M$. Sei jetzt $i, j \in I$ beliebig. Wenn $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, dann gilt $U_i = U_j$ und damit $i = j$. Insbesondere gilt auch $\forall i, j : U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j$.

Als nächstes betrachte eine Partition $\mathscr{F} = \{U_i\}_{i\in I}$ auf M und für jede $a, b \in M$ definiere $a \sim b :\Leftrightarrow (\exists i \in I : a, b \in U_i)$. Um Reflexivität von $\sim$ nachzuweisen, betrachte ein beliebiges $a \in M$. Da $\bigcup_{i\in I} U_i = M$, gibt es $i \in I$ mit $a \in U_i$. Nach Definition von $\sim$, gilt $a \sim a$. Symmetrie ist offensichtlich. Um Transitivität nachzuweisen betrachte $a, b, c \in M$, so dass $a \sim b$ und $b \sim c$. Nach Definition gibt es $i, j \in I$, so dass $a, b \in U_i$ und $b, c \in U_j$. Da $b \in U_i \cap U_j$, gilt $i = j$ und damit $a \sim c$. $\square$

Ein gutes Beispiel ist durch die folgende disjunkte Überdeckung der Menge der reellen Zahlen gegeben, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n,n+1)$. Sei I die Menge der natürlichen Zahlen und für jedes $i \in I(=\mathbb{N})$ sei U_i das Intervall $[i,i+1)$. Damit ist $\{U_i\}_{i\in I} = \{[n,n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Für je zwei $x,y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiere $x \sim y :\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte natürliche Zahl nicht größer x ist. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Die Faktormenge $\mathbb{R}_{\geq 0}/\sim$ ist die Menge aller Intervalle $[n,n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Formal

$$(\mathbb{R}_{\geq 0}/\sim) = \{[n,n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

5.2. **Kongruenz modulo *n*.**

Definition 5.2.1. (Kongruenz modulo n) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wir definieren auf $\mathbb{Z}$ die Relation

$$k \sim_n l :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } k = l + mn.$$

Gilt $k \sim_n l$ so sagen wir k ist kongruent l modulo n und schreiben manchmal auch

$$k \equiv l(n), \text{ oder } k \equiv l \bmod n.$$

Bemerkung 5.2.2. $k \sim_n l$ genau dann wenn k,l denselben Rest bei Division durch n haben.

Proposition 5.2.3. Die Relation $\sim_n$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Reflexivität: $k \sim_n k$ weil $k = k + 0k$.

Symmetrie: Wenn $k \sim_n l$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $k = l + mn$ und damit ist $l = k + (-m)n$. Das ergibt $l \sim_n k$, wie erwünscht.

Transitivität: Wenn $k_1 \sim_n k_2$ und $k_2 \sim k_3$, dann existieren m_1, m_2 in $\mathbb{Z}$ so dass

$$k_1 = k_2 + m_1 n \text{ und } k_2 = k_3 + m_2 n.$$

Dann ist $k_1 = k_3 + (m_1 + m_2)n$ und damit ist $k_1 \sim_n k_3$. □

Die Äquivalenzrelation $\sim_n$ erzeugt n Äquivalenzklassen, meistens durch $\bar{k}$ oder $[k]$ bezeichnet, wobei $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \cdots\} \\
\bar{1} &= \{1, 1 \pm n, 1 \pm 2n, 1 \pm 3n, \cdots\} \\
&\cdots\cdot \\
&\cdots\cdot \\
&\cdots\cdot \\
\overline{n-1} &= \{-1, -1 \pm n, -1 \pm n, -1 \pm 2n, -1 \pm 3n, \cdots\}
\end{aligned}$$

Definition 5.2.4. (Restklassen) Die Faktormenge $\mathbb{Z}/\sim_n$ wird mit $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet und wird die Menge der Restklassen modulo n oder auch der Kongruenzklassen modulo n genannt.

5.3. **Ordnungsrelationen.**

Definition 5.3.1. (Ordnungsrelation)

Sei M eine Menge und sei $\preceq$ (sprich: vor oder gleich) eine Relation auf M.

(1) Die Relation $\preceq$ heißt antisymmetrisch falls für alle $a, b \in M$ aus $a \preceq b$ und $b \preceq a$ die Identität $a = b$ folgt. Sie heißt Ordnungsrelation oder Halbordnung, falls sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
(2) Gilt für zwei Elemente a, b aus M weder $a \preceq b$ noch $b \preceq a$ heißen a und b nicht vergleichbar, oder nicht vergleichbar bezüglich der Relation $\preceq$. Andernfalls werden a und b vergleichbar genannt.
(3) Sei $\preceq$ eine Halbordnung auf M. Sind je zwei Elemente von M vergleichbar bezüglich $\preceq$, so nennt man die Relation $\preceq$ eine Totalordnung oder lineare Ordnung auf M. Das Paar $(M, \preceq)$ wird (total) geordnete Menge genannt.

Man betrachte die folgenden Beispiele.

Beispiel 5.3.2.

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine Totalordnung, $(\mathbb{Q}, <)$ ist nicht reflexiv, $(\mathbb{R}, \leq)$ ist eine Totalordnung.
(2) $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ist keine Totalordnung. Die Mengen $\{5, 6\}$ und $\{7, 8\}$ sind Elemente von $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, die nicht vergleichbar bezüglich $\subseteq$ sind.

Definition 5.3.3. (Schranken) Sei $(M, \preceq)$ eine geordnete Menge und sei $E \subseteq M$.

(1) Ein Element $\beta \in M$ heißt eine obere Schranke von E, wenn $x \preceq \beta$ für jedes Element $x \in E$.
(2) Ein Element $\beta \in M$ heißt eine untere Schranke von E, wenn $\beta \preceq x$ für jedes Element $x \in E$.
(3) Wenn E eine obere (bzw. untere) Schranke hat, wird E nach oben (bzw. nach unten) beschränkt. Die Menge E heißt beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 5.3.4. (Schranken)

(1) Betrachte $(\mathbb{R}, \leq)$. Das Intervall $[0, 1]$ ist nach unten und nach oben beschränkt.
(2) Die Menge $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und ist nach oben und nach unten beschränkt.
(3) Die Menge der Primzahlen ist als Teilmenge der reellen Zahlen nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.
(4) Die Menge der ganzen Zahlen ist als Teilmenge der reellen Zahlen weder nach unten noch nach oben beschränkt.

Definition 5.3.5. (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum)

Sei $(M, \preceq)$ eine total geordnete Menge. Wir bezeichnen mit $\prec$ die folgenderweise definierte Relation auf M, $\forall \alpha, \beta \in M : \alpha \prec \beta :\Leftrightarrow \alpha \preceq \beta \wedge \alpha \neq \beta$. Betrachten wir jetzt eine beliebige Teilmenge $E \subseteq M$.

(1) Sei $\alpha \in M$ eine obere Schranke von E mit der folgenden Eigenschaft: Kein $\gamma \in M$ mit $\gamma \prec \alpha$ ist obere Schranke von E. Dann ist α kleinste obere Schranke oder Supremum von E genannt. Man schreibt $\alpha = \sup E$.
(2) Sei $\alpha \in M$ eine untere Schranke von E mit der folgenden Eigenschaft: Kein $\gamma \in M$ mit $\alpha \prec \gamma$ ist untere Schranke von E. Dann ist α größte untere Schranke oder Infimum von E genannt. Man schreibt $\alpha = \inf E$.

(3) Gilt $\alpha = \sup E \in E$ (bzw. $\alpha = \inf E \in E$), dann wird α Maximum (bzw. Minimum) genannt. Man schreibt $\alpha = \max E$ (bzw. $\alpha = \min E$).

Behauptung 5.3.6. Seien $(M, \preceq)$ eine total geordnete Menge, $E \subseteq M$. Sei $\alpha = \sup M$. Dann ist α eindeutig bestimmt. Das heißt, falls $\beta = \sup M$ ist, dann $\alpha = \beta$.

Beweis. Angenommen $\alpha \neq \beta$. Da $\preceq$ eine totale Ordnung ist, ist $\alpha \preceq \beta$ oder ist $\beta \preceq \alpha$. Dann ist entweder $\alpha \prec \beta$ oder $\beta \prec \alpha$. Falls $\alpha \prec \beta$, dann ist α nach der Definition von $\beta = \sup E$ keine obere Schranke von E. Widerspruch! Falls $\beta \prec \alpha$, dann ist β nach der Definition von $\alpha = \sup E$ keine obere Schranke von E. Widerspruch! □

Ähnlich ist zu beweisen, dass jedes Infimum auch eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3. Betrachte $(\mathbb{R}, \leq)$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt? Wenn ja, geben Sie Infimum bzw. Supremum an. Handelt es sich dabei jeweils um Minima bzw. Maxima?

(1) $[-4, 18]$, $(-3, 2)$, $[-3, 2)$
(2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-n, n\}$, $\mathbb{R}\backslash\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-n, n\}\big)$, $\mathbb{R}\backslash\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0, n]\big)$.

Definition 5.3.7. (Wohlordnung) Eine total geordnete Menge $(M, \preceq)$ heißt wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes Element hat, d.h. für jede $E \subseteq M$, $E \neq \emptyset$, das Element $\alpha = \inf E$ existiert und $\alpha \in E$.

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet bezüglich $\leq$. Beachte, dass jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge auch wohlgeordnet bezüglich der selben Relation ist. Das heißt: Wenn $(\mathscr{M}, \preceq)$ eine Wohlordnung ist und E eine Teilmenge von M ist, dann ist $(E, \preceq')$ auch eine Wohlordnung, wobei $\preceq' = \preceq \cap E \times E$. Ein weiterer wichtigen Ordnungsbegriff entspricht die natürliche Ordnung auf die Menge der rationalen Zahlen.

Definition 5.3.8. (Dichte Ordnung) Sei M eine Menge mit wenigstens zwei Elementen. Eine totale Ordnung $\preceq$ auf M heißt dicht, wenn zwischen je zwei verschiedenen Elementen ein drittes liegt.

Tatsächlich ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$, wie auch auf $\mathbb{Q}$, dicht. Andererseits ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$, wie auch auf $\mathbb{N}$, nicht dicht.

6. Abbildungen und Mächtigkeit

6.1. Funktionen.

Definition 6.1.1. (Funktion-Zuordnungsdefinition) Seien A und B Mengen.

(1) Eine *Funktion* oder *Abbildung* f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ zuordnet.
(2) Das Element b wird mit $f(a)$ bezeichnet und *den* Wert von a unter f genannt; a wird als *ein* Urbild von b unter f bezeichnet.
(3) A wird Definitionsbereich (oder Definitionsmenge) von f genannt und B Zielmenge (oder Zielbereich).

Die folgende Notation wird verwendet, $f : A \to B$ oder ausführlicher $f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$.

Definition 6.1.2. (Funktion - mengentheoretische Definition) Eine Funktion ist ein Tripel $f = (A,B,G)$ von Mengen, wobei A *Definitionsbereich* und B *Zielbereich* genannt werden. Die Menge $G \subseteq A \times B$ erfüllt die folgenden Eigenschaften

(1) $\forall a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in G$
(2) $\forall a \in A : \forall b_1, b_2 \in B : (a,b_1) \in G \wedge (a,b_2) \in G \Rightarrow b_1 = b_2$

und wird der Graph der Funktion f genannt und oft mit $G(f)$ bezeichnet.

Bemerkung 6.1.3. Die oberen zwei Bedingungen sind zum Folgendem äquivalent:

$$\forall a \in A : \exists! b \in B : (a,b) \in G.$$

Gilt $(a,b) \in G$, schreiben wir $f(a) = b$. Damit ist $G(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}$.

Definition 6.1.4. (Bild) Sei $f : A \to B$ und sei $M \subseteq A$. Wir nennen die Menge $f(M) := \{f(a) : a \in M\}$ das Bild von M unter f. Das Bild vom Definitionsbereich der Funktion f wird Wertebereich von f genannt.

Definition 6.1.5. (Urbild) Sei $f : A \to B$.

(1) Sei $b \in B$. Dann wird die Menge $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$ das Urbild von b genannt.
(2) Im Allgemeinen ist für eine Teilmenge M des Zielbereichs B, das Urbild von M folgenderweise definiert:
$$f^{-1}(M) := \{a \in A \mid f(a) \in M\}.$$

Man beachte, dass nach Definition $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$ für jedes $b \in B$ gilt.

Lemma 6.1.6. Sei $f : A \to B$, $A_i \subseteq A$ und $B_i \subseteq B$ für $i = 1,2$.

(1) Sei $A_1 \subseteq A_2$. Dann gilt $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.
(2) Sei $B_1 \subseteq B_2$. Dann gilt $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Proposition 6.1.7. Sei $f : A \to B$, seien A_1, A_2 Teilmengen von A und B_1, B_2 Teilmengen von B. Dann gilt:

(1) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Beweis. (1) Sei $i \in \{1,2\}$. Dann ist $B_i \subseteq B_1 \cup B_2$ und damit ist $f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Daher gilt

$$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(B_1 \cup B_2).$$

Sei $a \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Nach Definition gelten $f(a) \in B_1 \cup B_2$, $a \in f^{-1}(f(a))$. Beachte: wenn $f(a) \in B_1$, dann ist $a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(B_1)$, und wenn $f(a) \in B_2$, dann ist $a \in f^{-1}(f(a)) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Das ergibt

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

(2) Nach Lemma 6.1.6 ist $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$. Sei jetzt $b \in f(A_1 \cup A_2)$. Nach Definition $(\exists a \in A_1 \cup A_2 : b = f(a))$. Fixiere ein solches a. Wenn $a \in A_1$, dann $b \in f(A_1)$. Wenn $a \in A_2$, dann $b \in f(A_2)$. Auf jeden Fall ist $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$ und damit gilt $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$. □

Proposition 6.1.8. Seien $f : A \to B$, A_1, A_2 Teilemengen von A und B_1, B_2 Teilemengen von B. Dann gilt:

(1) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
(3) $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$
(4) $f(A_1 \backslash A_2) \supseteq f(A_1) \backslash f(A_2)$

6.2. **Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.**

Definition 6.2.1. (Quotientenabbildung) Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Die Zuordnung $q : M \to M/\sim$, die jedem Element $a \in M$ seine Äquivlaenzklasse C_a zuordnet, wird Quotientenabbildung genannt.

Definition 6.2.2. (injektiv, surjektiv, bijektiv) Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

(1) injektiv, wenn jedes Element $b \in B$ höchstens ein Urbild hat.
(2) surjektiv, wenn jedes Element $b \in B$ mindestens ein Urbild besitzt.
(3) bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist. Das heißt, wenn jedes Element der Zielmenge genau ein Urbild besitzt.

Ist $f : A \to B$ eine surjektive Abbildung, so sagt man auch f ist eine Funktion von A auf B. Man beachte die folgenden Beispiele:

(1) $x \mapsto x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist weder injektiv noch surjektiv.
(2) Die Abbildung $x \mapsto x^2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(3) Die Abbildung $x \mapsto x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist surjektiv aber nicht injektiv.
(4) $x \mapsto x^2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv.

Definition 6.2.3. (Einschränkung einer Abbildung) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und sei $C \subseteq A$.Die Einschränkung $f \upharpoonright C$ (sprich: f eingeschränkt auf C) von f auf C ist die Abbildung $f \upharpoonright C : C \to B$ mit dem Graphen

$$G(f \upharpoonright C) := \{(a, f(a)) \mid a \in C\} \subseteq G(f).$$

Eine Einschränkung wird auch durch $f|_C : C \to B$ bezeichnet. Weitergehend betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f weder injektiv, noch surjektiv. Allerdings ist $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ injektiv.

Definition 6.2.4. (Erweiterung einer Abbildung) Sei $g : A \to B$ eine Abbildung und sei $D \supseteq A$. Dann heißt jede Abbildung $h : D \to B$, die $h \upharpoonright A = g$ erfüllt eine Erweiterung von g auf D.

Man beachte, dass Erweiterungen von Funktionen nicht eindeutig sind.

Definition 6.2.5. (Identität) Sei A eine Menge. Die identische Abbildung ist die Abbildung, die jedem $a \in A$ wieder a zuordnet, d.h.

$$\mathbb{1}_A : A \to A, \mathbb{1}_A(a) = a.$$

Definition 6.2.6. (Verknüpfung von Abbildungen) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Die Verknüpfung von f mit g (oder die Hintereinanderausführung von f und g bzw. die *Komposition von f und g*) in Zeichen, $g \circ f : A \to C$ ist definiert durch

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

Beispiel 6.2.7. Seien $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $f(n)=n^2$ und $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $g(m)=5m$ definiert. Dann gelten

(1) $f\circ g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(f\circ g)(m)=(5m)^2$,
(2) $g\circ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(g\circ f)(m)=5m^2$.

Lemma 6.2.8. (Assoziativgesetz) Sind $f:A\to B$, $g:B\to C$ und $h:C\to D$ drei Abbildungen, so gilt für deren Verknüpfung das Assoziativgesetz $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$.

Definition 6.2.9. (Umkehrfunktion) Sei $f:A\to B$ bijektiv. Die inverse Abbildung von f, die Inverse oder die Umkehrfunktion von f ist definiert durch

$$\begin{aligned} f^{-1}:B&\to A\\ f(a)&\mapsto a \end{aligned}$$

Lemma 6.2.10. Sei $f:A\to B$ bijektiv. Dann gelten für alle $a\in A$, $b\in B$: $f^{-1}(f(a))=a$, $f(f^{-1}(b))=b$. In Funktionsnotation $f\circ f^{-1}=\mathbb{1}_B$ und $f^{-1}\circ f=\mathbb{1}_A$.

Definition 6.2.11. Seien $(A,\preceq)$ und $(B,\trianglelefteq)$ zwei geordnete Mengen. Eine Abbildung $f:A\to B$ heißt

(1) monoton wachsend, falls aus $a\preceq b$ schon $f(a)\trianglelefteq f(b)$ folgt;
(2) monoton fallend, falls sich aus $a\preceq b$ die Relation $f(b)\trianglelefteq f(a)$ ergibt.

Die Funktion $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$, wie auch $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+5$, is monoton wachsend.

Definition 6.2.12. Seien $(A,\preceq)$ und $(B,\trianglelefteq)$ geordnete Mengen. Eine bijektive Abbildung $f:A\to B$ heißt Ordnungsisomorphismus, wenn das Folgende gilt

$$\forall a,b\in A: a\preceq b\Leftrightarrow f(a)\trianglelefteq f(b).$$

Schreibweise $(A,\preceq)\cong(B,\trianglelefteq)$.

Sei $\leq$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ und sei $\leq^g:=\leq\cap\mathbb{N}_g\times\mathbb{N}_g$, $\leq^u:=\leq\cap\mathbb{N}_u\times\mathbb{N}_u$. Die Totalordnungen $(\mathbb{N},\leq)$, $(\mathbb{N}_g,\leq^g)$ und $(\mathbb{N}_u,\leq^u)$ sind paarweise isomorph. Das heißt

$$(\mathbb{N},\leq)\cong(\mathbb{N}_g,\leq),(\mathbb{N},\leq)\cong(\mathbb{N}_u,\leq),(\mathbb{N}_g,\leq)\cong(\mathbb{N}_u,\leq).$$

Definition 6.2.13. Seien A, B Mengen. Dann ist ${}^AB$ die Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich A und Zielbereich B.

Oft wird eine Zahl $n\in\mathbb{N}$ mit der Menge $\{0,1,\cdots,n-1\}$ identifiziert. Insbesondere 0 entspricht $\emptyset$, 1 entspricht $\{0\}$, 2 entspricht $\{0,1\}$, usw. Sei $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann besteht die Menge ${}^n2$ nach Definition aus allen Funktionen $f:\{0,1,\cdots,n-1\}\to\{0,1\}$. Beachte, die Anzahl dieser Funktionen ist 2^n, was auch die Anzahl der Elemente der Menge $\mathscr{P}(\{0,1,\cdots,n-1\})$ ist.

Beispiel 6.2.14. Noch ein wichtiges Beispiel ist die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, bezeichnet durch ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Die Elemente dieser Menge werden reelle Zahlenfolgen genannt und üblicherweise mit $(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ bezeichnet. Man kann den Begriff einer Zahlenfolge als eine Erweiterung des Begriffes n-Tupel betrachten. Dementsprechend hat eine Zahlenfolge "unendlich viele" statt "n Koordinaten" (hier $n\in\mathbb{N}$)! Um diese Idee präziser auszudrücken werden wir uns im nächsten Kapitel mit dem Begriff "Mächtigkeit" beschäftigen.

6.3. **Unendliches Produkt.**

Definition 6.3.1. (Unendliches Produkt) Seien M_i, $i \in I$ Mengen. Wir definieren

$$\prod_{i \in I} M_i := \{f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i \mid \forall i \in I : f(i) \in M_i\}$$

das Cartesisches Produkt der M_i.

Sind alle Mengen $M_i = M$ gleich, man schreibt statt $\prod_{i \in I} M$ auch M^I oder ${}^I M$, was mit der oberen Bezeichnung von M^I als Menge aller Abbildungen von I nach M übereinstimmt. Wenn alle M_i und I nichtleer sind, ist $\prod_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ äquivalent zum Auswahlaxiom. Das Auswahlaxiom ist die Aussage, dass es für jede Familie nichtleerer paarweise-disjunkten Mengen eine Abbildung gibt, die genau ein Element aus jedem Element der Familie aussucht. Formal $\forall F : \emptyset \notin F \wedge (\forall x, y \in F : (x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)) \Rightarrow \exists C \forall x \in F(\mathrm{Sing}(C \cap X))$, wobei $\mathrm{Sing}(C \cap X)$ eine Abkürzung von “hat genau ein Element” ist.

Definition 6.3.2. (charakteristische Funktion) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Die charakteristische Funktion von A, bezeichnet $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, wird folgenderweise definiert:

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \in A \\ 0, & \text{if } n \notin A. \end{cases}$$

Lemma 6.3.3. Die Abbildung mit Definitionsbereich $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ und Zielbereich ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, die jeder Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion χ_A zuordnet, nämlich $F : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, $A \mapsto \chi_A$ bijektiv ist.

Beweis. Beachte $A_1 \neq A_2 \Leftrightarrow \chi_{A_1} \neq \chi_{A_2}$ gilt für alle $A_1, A_2 \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Außerdem entspricht eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ genau einer Teilmenge $A_f \subseteq \mathbb{N}$ so dass $\chi_{A_f} = f$. Tatsächlich:

- Seien $A_1 \neq A_2$ in $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. O.b.d.A. $\exists n \in A_1 \setminus A_2$. Dann gilt $\chi_{A_1}(n) = 1$, $\chi_{A_2}(n) = 0$. Umgekehrt, angenommen $\chi_{B_1} \neq \chi_{B_2}$, wobei B_1, B_2 in $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Dann $\exists m \in \mathbb{N} : \chi_{B_1}(m) \neq \chi_{B_2}(m)$. Das heißt $B_1 \triangle B_2$ ist nicht leer und damit $B_1 \neq B_2$.
- Sei $f : \mathbb{N} \to 2$ beliebig. Dann $A_f := f^{-1}(\{1\}) \subseteq \mathbb{N}$ und $\chi_{A_f} = f$.

□

6.4. **Mächtigkeit.**

Definition 6.4.1. (Gleichmächtigkeit) Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung (eine Bijektion) von A auf B existiert. In diesem Fall sagt man auch A und B haben gleiche Kardinalität oder die gleiche Kardinalzahl und schreibt $A \approx B$ oder $|A| = |B|$.

Beispiele, die wir schon kennen, sind $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}_g$ und $\mathbb{N}_g \approx \mathbb{N}_u$.

Lemma 6.4.2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Beweis.

$$\begin{array}{llllll}
(0,0)_0 & (1,0)_1 & (2,0)_3 & (3,0)_6 & (4,0)_{10} & \cdots \\
(0,1)_2 & (1,1)_4 & (2,1)_7 & (3,1)_{11} & (4,1) & \cdots \\
(0,2)_5 & (1,2)_8 & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,3)_9 & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(0,4) & (1,4) & (4,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
\cdots
\end{array}$$

Die Formel $J(n,m) = m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$ ergibt den entsprechenden Index. □

Mit der Hilfe der vollständigen Induktion kann man beweisen, dass $\mathbb{N}^k \approx \mathbb{N}$ für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt. Man beachte, dass die Mengen $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig sind, was wir als nächstes beweisen werden.

Definition 6.4.3. Eine Menge M wird

(1) **endlich** genannt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass M genau n Elemente hat. Das heißt, M wird endlich genannt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass M und $\{0, 1, \cdots, n\}$ gleichmächtig sind.
(2) **abzählbar unendlich**, wenn M gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist. Insbesondere wird M abzählbar unendlich genannt, wenn es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf M gibt.
(3) Eine Menge wird **abzählbar** genannt, wenn sie endlich oder unendlich abzählbar ist.
(4) **überabzählbar** genannt, wenn M nicht abzählbar ist.

Theorem 6.4.4. *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Man beachte, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to (0,1),\ f(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$$

eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $(0,1)$ ist. Damit genügt es zu beweisen, dass $(0,1)$ nicht abzählbar ist. Angenommen $(0,1)$ abzählbar ist, existiert eine Aufzählung $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der reellen Zahlen im offenen Einheitsintervall. Betrachten wir die Dezimalentwicklung dieser Zahlen:

$$r_n = 0, r_{n0}\, r_{n1}\, r_{n2}\, \cdots .$$

Damit erhalten wir das folgende Aufzählung:

$$\begin{array}{l}
r_0 : 0,\mathbf{r_{00}}\, r_{01}\, r_{02}\, r_{03}\, r_{04}\, r_{05} \cdots \\
r_1 : 0,r_{10}\, \mathbf{r_{11}}\, r_{12}\, r_{13}\, r_{14}\, r_{15} \cdots \\
r_2 : 0,r_{20}\, r_{21}\, \mathbf{r_{22}}\, r_{23}\, r_{24}\, r_{25} \cdots \\
r_3 : 0,r_{30}\, r_{31}\, r_{32}\, \mathbf{r_{33}}\, r_{34}\, r_{35} \cdots \\
\quad \cdots
\end{array}$$

Betrachte $r = 0, x_0x_1x_2x_3 \cdots$ wobei $x_i = \begin{cases} r_{ii} - 1 & \text{wenn } r_{ii} > 2 \\ r_{ii} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$. Nach Annahme $\exists n \in \mathbb{N} : r = r_n$ und damit ist $r_{nn} = x_n$. Widerspruch! □

Lemma 6.4.5.

(1) Jede Teilmenge eine abzählbare Menge ist abzählbar.
(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine unendlich abzählbare Menge. Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ unendlich abzählbar.

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung gegeben. □

6.5. Satz von Schröder-Bernstein und Satz von Cantor.

Definition 6.5.1. Die Menge A heißt *höchstens gleichmächtig zu* B, wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt. Schreibweise: $A \preceq B$ oder $|A| \leq |B|$.

Die Abbildungen $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$, $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x) = (x,0)$ und $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $f_2(x) = (x,0)$ sind injektiv. Damit gelten $\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N}^2$

Lemma 6.5.2. Wenn $A \subseteq B$, dann $A \preceq B$.

Beweis. Die Abbildung $f : A \to B$, wobei $f(x) = x$ für alle x ist injektiv. □

Lemma 6.5.3. Wenn $A \preceq B$ und $B \subseteq A$, dann $A \approx B$.

Beweis. Sei $f : A \preceq B$. Sei $f^0 = \mathbb{1}_A$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n mal}}$. Damit wird die folgende absteigende Kette erhalten: $A \supseteq B \supseteq f(A) \supseteq f(B) \supseteq f^2(A) \supseteq f^2(B) \supseteq \cdots$. Man beachte $\Delta_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(B)$. Ferner

$$A\backslash\Delta_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(B)\backslash f^{k+1}(A) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(A)\backslash f^k(B) \text{ und } B\backslash\Delta_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(B)\backslash f^{k+1}(A) \cup \bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} f^k(A)\backslash f^k(B).$$

Sei $\Delta_1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(B)\backslash f^{k+1}(A)$. Damit erhalten wir die folgenden Darstellungen der Mengen A und B als disjunkte Vereinigungen: $A = \big(\Delta_0 \cup \Delta_1\big) \cup A\backslash B \cup f(A)\backslash f(B) \cup f^2(A)\backslash f^2(B) \cup \cdots$ und

$B = \big(\Delta_0 \cup \Delta_1\big) \cup f(A)\backslash f(B) \cup f^2(A)\backslash f^2(B) \cup f^3(A)\backslash f^3(B) \cup \cdots$.

Jetzt ist es aber nicht schwer zu beweisen, dass die Abbildung $h : A \to B$, wobei

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \Delta_0 \cup \Delta_1 \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases},$$

bijektiv ist und daher ist $A \approx B$. □

Korollar 6.5.4. A ist gleichmächtig zu B genau dann wenn es eine injektive Abbildung von A nach B und eine surjektive Abbildung von A auf B gibt.

Theorem 6.5.5. *(Satz von Cantor) Sei A eine Menge. Dann* $\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\} \not\preceq A$.

Beweis. Angenommen $\mathscr{P}(A) \preceq A$. Nach dem Lemma existiert eine surjektive Abbildung $f : A \to \mathscr{P}(A)$. Sei $\Delta = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Dann ist Δ eine Teilmenge von A. Sei $a = f^{-1}(\Delta)$. Jetzt sind $\Delta \subseteq A$, $a \in A$ und es bestehen zwei Möglichkeiten: entweder $a \in \Delta$ oder $a \notin \Delta$. Wenn $a \in \Delta$, dann erfüllt a die Definitionseigenschaft von Δ. D.h. $a \notin f(a)$. Da aber $f(a) = \Delta$, ist $a \notin \Delta$. Widerspruch! Wenn $a \notin \Delta$, dann $a \notin f(a)$ da $\Delta = f(a)$. Daher erfüllt a die Definitionseigenschaft von Δ. Deshalb $a \in \Delta$. Widerspruch! □

Definition 6.5.6. Die Menge B heißt **mächtiger** als A, auch A **weniger mächtiger als** B wenn

$$A \preceq B \text{ und } A \not\approx B.$$

Korollar 6.5.7. Sei A eine Menge. Dann $A \prec \mathscr{P}(A)$.

Beweis. Die Abbildung $f : A \to A, a \mapsto \{a\}$ ist injektiv. Deshalb $A \preceq \mathscr{P}(A)$. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein $A \approx B \Leftrightarrow A \preceq B \wedge B \preceq A$. Nach dem Satz von Cantor $\mathscr{P}(A) \not\preceq A$. Daraus folgt $A \not\approx \mathscr{P}(A)$ und damit $A \prec \mathscr{P}(A)$. □

Für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, sei $\mathscr{P}^n(\mathbb{N}) = \underbrace{\mathscr{P}(\mathscr{P}(\cdots\mathscr{P}(\mathbb{N})))}_{\text{n mal}}$,

Der Satz von Cantor ergibt eine unendliche, aufsteigende Kette verschiedener Unendlichkeiten:

$$\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R} \prec \mathscr{P}^2(\mathbb{N}) \prec \cdots \prec \mathscr{P}^n(\mathbb{N}) \prec \cdots$$

Theorem 6.5.8. $\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Beweis. Die Abbildung $A : \mathbb{R} \to (0,1)$ wobei $A : x \mapsto \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$. ist bijektiv. Es ist genügend zu beweisen, dass $(0,1) \approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Erstens zeigen wir, dass $(0,1) \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Die Dezimalentwicklung $0.r_0r_1\cdots$ einer reellen Zahl $r \in (0,1)$ bestimmt die Funktion $f_r \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, wobei $f_r(n) = r_n$ für jedes n. Die Abbildung $F : (0,1) \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, $F(r) = f_r$ ist injektiv und daher $(0,1) \preceq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Als nächstes zeigen wir, dass ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \preceq \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Man beachte, dass die Abbildung $F : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, $F(f) = \mathrm{Graph}(f)$ injektiv ist und daher gilt ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \preceq \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Da $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, ist auch $\mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und damit gilt ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \preceq \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Ferner wird $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \preceq {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ bewiesen. Gewiss ist $F : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, die jeder A die charakteristische Funktion χ_A zuordnet, injektiv. Zuletzt wird ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq (0,1)$ überprüft. Man beachte, dass jede $f \in {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$ die Dezimalentwicklung $r_f = 0.f(0)f(1)\cdots$ bestimmt. Die Abbildung $F : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to (0,1)$, $F(f) = r_f$ ist injektiv und damit ${}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \preceq (0,1)$ gilt. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein gilt $(0,1) \approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$. □

Die **Kontinuumshypothese (CH)** ist die folgende Behauptung:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ unendlich. Dann ist $A \approx \mathbb{N}$ oder $A \approx \mathbb{R}$.

Wenn CH, dann gibt es keine unendliche Größe streng zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$. Es kann aber auch sein, dass es unendlich viele Unendlichkeiten dazwischen gibt. Es ist wichtig zu betonen, dass CH von der üblichen Axiomen der Mathematik unabhängig ist.

Proposition 6.5.9. ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \approx {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \approx \mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$

Beweis. Man beachte, dass $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und damit $2^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Allerdings ist $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \preceq \mathscr{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \approx \mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$. Damit gelten $2^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \preceq 2^{\mathbb{N}}$. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein gilt $2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

Korollar 6.5.10. $\mathbb{N} \prec \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Beweis. Nach dem Satz von Cantor ist $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$ und damit gilt $\mathbb{N} \prec \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

7. Zahlenmengen

7.1. **Die natürlichen Zahlen.** Die folgende axiomatische Beschreibung von $\mathbb{N}$ wird von Giuseppe Peano (1858-1932) gegeben:

Diskussion 7.1.1. (Peano-Axiome) Die natürlichen Zahlen sind eine Menge $\mathbb{N}$ zusammen mit einer Vorschrift S, die die Peano-Axiome erfüllt:

PA1. $0 \in \mathbb{N}$
PA2. $\forall n \in \mathbb{N} : (S(n) \in \mathbb{N})$
PA3. $\forall n \in \mathbb{N} : \neg(S(n) = 0)$
PA4. $\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : (S(n) = S(m)) \Rightarrow n = m.$
PA5. Enthält eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 0 und mit jeder Zahl ihren Nachfolger, so ist $M = \mathbb{N}$.

Auf $\mathbb{N}$ sind Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ definiert, wobei

- $(\mathbb{N}, +)$ eine kommutative Halbgruppe mit Nullelement 0 ist;
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ eine kommutative Halbgruppe mit Einselement 1 ist;
- $+$ das Distributivgesetz bezüglich $\cdot$ erfüllt.

Außerdem gelten die beiden Ordnungsaxiome

O1. Ist $a \leq b$, so ist für alle $c \in \mathbb{N}$ auch $a + c \leq b + c$.
O2. Sind $x > 0$ und $y > 0$, so ist $xy > 0$.

In der naiven Mengenlehre sind die Peano-Axiome als Definition der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu betrachten. Allerdings kann man im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre beweisen, dass es eine eindeutig bestimmten Menge gibt, die die Eigenschaften PA1-PA5 erfüllt, d.h. die Existenz der natürlichen Zahlen wird in der axiomatischem Mengenlehre bewiesen.

7.1.1. *Die natürlichen Zahlen und axiomatische Mengenlehre.*

Definition 7.1.2.

(1) (Trichotomie) Eine Relation R auf M erfüllt Trichotomie, wenn das Folgendes gilt
$$\forall a, b \in M : aRb \vee bRa \vee a = b.$$
(2) (Irreflexivität) Sei R eine Relation auf M. Dann heißt R irreflexiv, wenn
$$\forall a \in M : \neg aRa.$$
(3) (strikte Totalordnung) Eine irreflexive, transitive Relation R auf eine Menge M heißt strikte Totalordnung, wenn sie zusätzlich Trichotomie erfüllt.

Die folgenden Relationen sind strikte Totalordnungen: $(\mathbb{R}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{N}, <)$ usw.

Proposition 7.1.3.

- Sei (M, R) eine strikte Totalordnung. Dann ist die Relation R^* eine Totalordnung auf M, wobei
$$\forall a, b \in M : aR^*b :\Leftrightarrow aRb \vee a = b.$$

- Sei (M,R) eine Totalordnung. Dann ist die Relation R^* eine strikte Totalordnung auf M, wobei

$$\forall a,b \in M : aR^*b :\Leftrightarrow aRb \wedge a \neq b.$$

Bemerkung 7.1.4. Wenn R eine strikte Totalordnung auf M ist, wird R^* die oben definierte total geordnete Relation auf M bezeichnen. Umgekehrt: Ist (M,R) eine Totalordnung, bezeichnet R^* die oben definierte strikte Totalordnung auf M.

Betrachten wir nochmals die (endlichen) von-Neumann-Ordinalzahlen:

- $\underline{0} := \emptyset$,
- $\underline{1} := \{\emptyset\} = \{\underline{0}\}$,
- $\underline{2} := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\underline{0}, \underline{1}\}$,
- $\underline{3} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}$,
- $\underline{4} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}\}$,
- $\cdots$

Beispiel 7.1.5. Die binäre Relation $\in$ auf

(1) $\{\emptyset\}$ ist einfach $\emptyset$.
(2) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ist die Menge $\{(\emptyset, \{\emptyset\})\}$.
(3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ist die Menge $\{(\emptyset, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})\}$

Ein weiteres Beispiel ist die binäre Relation $\in$ auf $\underline{4}$. Das ist die folgende Menge:

$$\begin{aligned}&\{(\emptyset, \{\emptyset\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), (\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}),\\ &(\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}), (\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}),\\ &(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})\}\end{aligned}$$

Beachte, $\underline{n+1}$ ist nach Definition die Menge $\underline{n} \cup \{\underline{n}\}$. Im Allgemeinen wird, wann immer A eine gegebene Menge ist, $S(A) := A \cup \{A\}$ der Nachfolger von A genannt. Man beachte, die Relation $\in$ auf $\underline{n}$ ist eine strikte Totalordnung! Tatsächlich ist sie irreflexiv, transitiv und erfüllt Trichotomie. Die Ordnungen $(\underline{n}, \in)$ erfüllen eine weitere wichtige Eigenschaft:

Definition 7.1.6. (strikte Wohlordnung) Sei R eine strikte Totalordnung auf M. Dann heißt R eine strikte Wohlordnung, wenn jede nichtleere $E \subseteq M$, ein Minimum bezüglich R^* hat.

Die Relation $\in$ auf $\underline{n}$ ist eine strikte Wohlordnung. Als ein weiteres Beispiel, betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $E_n := [n, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Sei $X = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und definiere $A \preceq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$. Dann hat X kein $\preceq$-Minimum und damit ist $(X, \preceq)$ eine Totalordnung, aber keine Wohlordnung. Außerdem ist $(X, \prec)$ eine strikte Totalordnung, aber keine strikte Wohlordnung.

Betrachten wir als nächstes die Menge X aller endlichen von-Neumann-Ordinalzahlen $\underline{n}$. In der axiomatischen Mengenlehre wird die Existenz der Menge X mit Hilfe von den Unendlichkeit- und Aussonderungsaxiomen (wie auch weiteren Axiomen) bewiesen. Das **Unendlichkeitsaxiom** lautet:

$$(ZF7) \;\; \exists Z : \forall X : (\emptyset \in Z \wedge (X \in Z \Rightarrow S(X) \in Z)).$$

Nach dem Unendlichkeitsaxiom existiert eine Menge Z, die alle Mengen der Form $\underline{n}$ enthält! Die Menge der natürlichen Zahlen enthält aber keine anderen Elemente. Zu diesem Zweck wird das **Aussonderungsaxiom** verwendet. Das lautet: Sei φ *eine Formel der ersten Stufe in der Sprache der Mengenlehre* und y eine Variable, die nicht frei in φ vorkommt. Dann gilt

$$(ZF3)\ \ \forall V : \exists Y : \forall X (X \in Y \Leftrightarrow X \in V \wedge \varphi(X))$$

Man beachte, *eine Formel der ersten Stufe in der Sprache der Mengenlehre* haben wir in dieser Einführung in die höhere Mathematik nicht definiert, was aber in spezialisierten Logik-Vorlesungen angegeben wird.

Diskussion 7.1.7. Die Relation $\in$ ist irreflexiv, transitiv und erfüllt Trichotomie auf X. Ferner ist $(X, \in)$ eine strikte Wohlordnung. Im Allgemeinen wird eine Menge z mit den Eigenschaften, dass $\forall y \in z : y \subseteq z$ gilt und dass $\in$ eine strikte Wohlordnung auf z ist, eine Ordinalzahl, oder von-Neumann-Ordinalzahl, genannt. In der Mengenlehre wird $(X, \in)$ mit ω bezeichnet und ist als die kleinste unendliche von-Neumann-Ordinalzahl bekannt. Eigentlich ist ω, oder X, nichts anderes als die Menge der natürlichen Zahlen, selbst! Außerdem kann man beweisen, dass diese Menge die Peano-Axiome erfüllt.

7.1.2. *Fundierung.*

Definition 7.1.8. (wohlfundierte Relation) Sei M eine Menge und sei R eine Relation auf M. Die Relation R heißt wohlfundiert, falls es für jede nichtleere Teilmenge E von M ein $x \in E$ gibt mit $\forall y \in E : \neg(yRx)$.

Diskussion 7.1.9. (Fundierungsaxiom)

- Man beachte, dass wenn $\prec$ wohlfundiert auf M ist, in M keine unendlichen absteigenden Ketten bezüglich $\prec$ existieren. Das heißt, es gibt keine $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit der Eigenschaft $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \prec a_n$. Insbesondere enthalten wohlfundierte Relationen keine Zyklen!
- Nach Definition ist $(\alpha, \in)$ eine strikte Wohlordnung für jede Ordinalzahl α. Man beachte, dass jede strikte Wohlordnung fundiert ist. Damit ist $\in$ auf jeder Ordinalzahl α wohlfundiert.
- Das **Fundierungsaxiom** ist die Aussage, dass die Relation $\in$ auf jeder nicht leeren Menge wohlfundiert ist. Das Fundierungsaxiom lautet

$$\forall x : (\neg(x = \emptyset) \Rightarrow (\exists y : (y \in x \wedge \neg \exists z : (x \in z \wedge z \in y))))$$

7.2. **Die ganzen Zahlen.** Einer der größten Unterschiede zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der ganzen Zahlen ist die Menge der Lösungen der Gleichung $x + n = 0$, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Während die Gleichung in $\mathbb{N}$ nicht Lösbar ist, ist sie lösbar in $\mathbb{Z}$.

Die ganzen Zahlen werden aus den natürlichen Zahlen folgenderweise konstruiert. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(m,n) \sim (m',n') :\Leftrightarrow m + n' = m' + n.$$

Diskussion. Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass sie eine Äquivalenzrelation ist:
Reflexivität: $(m,n) \sim (m,n)$ gilt, da $m + n = n + m$.
Transitivität: Angenommen $(m,n) \sim (m',n')$ und $(m',n') \sim (m'',n'')$. Dann gilt

(1) $m + n' = n + m'$,
(2) $m' + n'' = n' + m''$.

Zu überprüfen ist $(m,n) \sim (m'',n'')$. Das heißt, wir müssen überprüfen, dass $m+n'' = n+m''$ gilt. Also gilt

$$m+n'' \underset{\text{für } n''}{\overset{\text{aus (2)}}{=}} m+(n'+m''-m') \underset{\text{für } m'}{\overset{\text{aus (1)}}{=}} m+(n'+m''-m-n'+n) = m''+n$$

wie erwünscht.

Symmetrie Angenommen $(m,n) \sim (k,l)$. Zu zeigen ist $(k,l) \sim (m,n)$. Also gilt $m+l = n+k$ und nach Kommutativität der Addition auf $\mathbb{N}$ gilt $k+n = l+m$.

Dann kann man die ganze Zahlen als die folgende Faktormenge definieren $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$.

Lemma 7.2.1. Es gilt $\mathbb{Z} = \{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Offensichtlich $\mathbb{Z} = \{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\} \cup \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$. Als nächstes betrachten wir eine beliebige Äquivalenzklasse $[(m,n)]$. Mann beachte: Wenn $n \geq m$, dann gilt $(m,n) \sim (k,0)$, wobei $k = m-n$ und wenn $n > m$, dann gilt $(m,n) \sim (0,k)$ wobei $k = n-m$. □

Aufgabe 4.

(1) Bestimme die Elemente von $[(0,0)]$.
(2) Bestimme die Elemente des Durchschnitts $X = \{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\} \cap \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. (1) Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Dann $(m,n) \sim (0,0)$ gdw. $n+0 = m+0$ gdw. $m = n$. Das heißt $[(0,0)] = \{(m,n) : m = n\}$.

(2) Sei $[(x,y)] \in X$. Dann gelten $(x,y) \sim (n,0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(x,y) \sim (0,m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Damit $x+0 = y+n$ und $x+m = y+0$. Daraus folgt $x = (x+m)+n = x+(m+n)$ und daher $m+n = 0$. Die einzige Lösung dieser Gleichung in $\mathbb{N}$ ist $n = m = 0$ und damit ist $x = y$. Es ergibt sich

$$\{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\} \cap \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\} = [(0,0)].$$

□

Definition 7.2.2. Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Definiere folgenderweise eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$:

$$[(m,n)] \leq [(m',n')] :\Leftrightarrow m+n' \leq n+m'.$$

Behauptung 7.2.3. Die Definition der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ ist unabhängig von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen:

Beweis. Seien $(m_0,n_0) \sim (m_1,n_1)$ und $(m_0',n_0') \sim (m_1',n_1')$. Wir müssen zeigen, dass $[(m_0,n_0)] \leq [(m_0',n_0')]$ gdw. $[(m_1,n_1)] \leq [(m_1',n_1')]$.

($\Rightarrow$): Angenommen *a)* $m_0+n_0' \leq n_0+m_0'$, *b)* $m_0+n_1 = n_0+m_1$, *c)* $m_0'+n_1' = n_0'+m_1'$. Zu zeigen ist $m_1+n_1' \leq n_1+m_1'$.

$$\begin{aligned} m_1+n_1' &\overset{\text{aus c)}}{=} m_1+(n_0'+m_1'-m_0') \overset{\text{aus b)}}{=} (m_0+n_1-n_0)+(n_0'+m_1'-m_0') \\ &= (m_0+n_0')+(n_1-n_0)+(n_1'-m_0') \\ &\overset{\text{aus a)}}{\leq} (n_0+m_0')+n_1-n_0+m_1'-m_0' \leq n_1+m_1'. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ähnlich. □

Diskussion 7.2.4.

(1) Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass die Abbildung $\varphi_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto [(n,0)]$ injektiv ist. Tatsächlich: Angenommen $f(n) = f(m)$. Dann $[(n,0)] = [(m,0)]$ und damit $(n,0) \sim (m,0)$. Nach Definition $n+0 = m+0$ und so $n = m$.

(2) Es ist auch leicht zu zeigen, dass für alle $n,m \in \mathbb{N}$:
  a) $[(n,0)] \leq [(m,0)]$ gdw. $n \leq m$
  b) $[(0,n)] \leq [(0,m)]$ gdw. $m \leq n$
  c) $[(0,n)] \leq [(m,0)]$

  gelten. Damit erkennen wir in $\{[(m,0)] : m \in \mathbb{N}\}$ die natürlichen Zahlen und in $\{[(0,m)] : m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ die negativen ganzen Zahlen.

(3) Es ist auch leicht zu überprüfen, dass

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \{[(n,0)] : n \in \mathbb{N}\}, n \mapsto [(n,0)]$$

  ein Ordnungsisomorphismus ist.

Aufgabe 5. Sei $F : \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N}$, $[(0,n)] \mapsto n$. Sei $\preceq$ die folgenderweise definierte Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$:

$$m \preceq n \text{ gdw. } n \leq m.$$

Zeigen Sie, dass F ein Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathbb{Z}_{\leq 0} := \{[(0,n)] : n \in \mathbb{N}\}$ und $(\mathbb{N}, \preceq)$.

Lemma 7.2.5. Die Relation $\leq$ ist eine Totalordnung auf $\mathbb{Z}$.

Beweis. *Reflexivität* Nach Definition.

Transitivität Seien $[(m_0,n_0)] \leq [(m_1,n_1)]$, $[(m_1,n_1)] \leq [(m_2,n_2)]$. Dann $m_0 + n_1 \leq n_0 + m_1$ und $m_1 + n_2 \leq n_1 + m_2$. Zu zeigen ist $[(m_0,n_0)] \leq [(m_2,n_2)]$. Das heißt, es ist zu zeigen, dass $m_0 + n_2 \leq n_0 + m_2$. Also $m_0 + n_2 \leq m_0 + (n_1 + m_2 - m_1) \leq (n_0 + m_1 - n_1) + (n_1 + m_2 - m_1) = n_0 + m_2$.

Antisymmetrie wird ähnlich bewiesen.

Je zwei Elemente der Faktormenge sind vergleichbar: Nach Diskussion 7.2.4. □

Definition 7.2.6. Seien $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$. Definiere die folgenden Rechenoperationen auf $\mathbb{Z}$.

$$[(a,b)] \oplus [(a',b')] := [(a+a', b+b')] \text{ und } [(a,b)] \otimes [(a',b')] := [(aa'+bb', ab'+ba')].$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die obigen Definitionen unanhängig von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen sind.

Behauptung 7.2.7. Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Es gelten:

(1) $[(n,0)] \oplus [(m,0)] = [(m+n,0)], \quad [(n,0)] \otimes [(m,0)] = [(nm,0)]$,
(2) $[(0,n)] \oplus [(0,m)] = [(0,m+n)], \quad [(0,n)] \otimes [(0,m)] = [(0,nm)]$,
(3) $[(n,0)] \oplus [(0,m)] = [(n,m)], \quad [(n,0)] \otimes [(0,m)] = [(0,nm)]$,
(4) $[(0,n)] \oplus [(m,0)] = [(m,n)], \quad [(0,n)] \otimes [(m,0)] = [(0,nm)]$.

Beweis. Nach Definition. □

Theorem 7.2.8. *Die ganzen Zahlen* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *sind ein Integritätsbereich.*

Diskussion 7.2.9. Ab jetzt wird die bekannte Schreibweise für die ganzen Zahlen verwendet: jede Klasse $[(n,0)]$ wird mit n bezeichnet und jede Klasse $[(0,n)]$ wird mit $-n$ bezeichnet.

Es gibt noch eine wichtige Eigenschaft der ganzen Zahlen, die wir als nächstes beweisen werden:

Lemma 7.2.10. Sei $T \subseteq \mathbb{Z}$, $T \neq \emptyset$, T nach unten beschränkt. Dann hat T ein kleinstes Element.

Beweis. Betrachte die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in T : k+n \geq 0\}$. Da T von unten beschränkt ist, ist M nicht leer. Nach den Eigenschaften der natürlichen Zahlen hat M ein kleinstes Element m und es gilt $M' := \{z+m \mid z \in T\} \subseteq \mathbb{N}$. Betrachte jetzt das kleinste Element n von M' und sei $y := n-m$. Da $n \in M'$, gilt $y \in T$. Als letztes betrachte ein beliebiges $z \in T$. Dann gilt $z+m \geq n$. Daraus folgt $z \geq n-m$ und somit $z \geq y$ gilt. □

7.3. **Die rationalen Zahlen.** Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl. Betrachten wir die Gleichung $x \cdot n = 1$. Die Gleichung hat keine Lösungen weder in $\mathbb{N}$, noch in $\mathbb{Z}$, außer wenn $n = 1$.

Sei $\mathbb{Z}_+ = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\}$. Betrachte die folgenderweise definierte Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, wobei

$$(m,n) \sim (m',n') :\Leftrightarrow m \cdot n' = m \cdot m'$$

ist eine Äquivalenzrelation. Tatsächlich:

Reflexivität gilt, da $(m,n) \sim (m,n)$ gdw. $mn = nm$.

Transitivität ist leicht nachzuweisen: Angenommen $(m_0,n_0) \sim (m_1,n_1)$ und $(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2)$. Dann gelten $m_0 \cdot n_1 = n_0 \cdot m_1$, $m_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot m_2$. Zu zeigen $m_0 \cdot n_2 = n_0 \cdot m_2$. Es gilt:

$$m_0 \cdot n_2 = n_2 \cdot \frac{n_0 \cdot m_1}{n_1} = n_0 \cdot \frac{n_2 \cdot m_1}{n_1} = n_0 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1 \cdot m_2}{n_2} = n_0 \cdot m_2.$$

Symmetrie: Nach Definition.

Definition 7.3.1. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist die Faktormenge $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+)/\sim$.

Behauptung 7.3.2. Die Abbildung $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto [(n,1)]$ ist injektiv.

Definition 7.3.3. Auf $\mathbb{Q}$ definieren wir die folgende Ordnungsrelation $\leq$:

$$[(m,n)] \leq [(m',n')] :\Leftrightarrow m \cdot n' \leq n' \cdot m.$$

Aufgabe 7. Zeige, dass die Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{Q}$

(1) wohldefiniert ist (das heißt, dass die Definition von $\leq$ unabhängig von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen ist);
(2) eine Totalordnung auf $\mathbb{Q}$ ist.

Beweis. Um (1) zu beweisen, betrachte (m_0,n_0), (m'_0,n'_0), (m_1,n_1) und (m'_1,n'_1) so dass:

a) $(m_0,n_0) \sim (m_1,n_1)$ und
b) $(m'_0,n'_0) \sim (m'_1,n'_1)$.

Zeige, dass $[(m_0,n_0)] \leq [(m'_0,n'_0)]$ genau dann wenn $[(m_1,n_1)] \leq [(m'_1,n'_1)]$. Das heißt, wir müssen zeigen, dass $m_0 n'_0 \leq n_0 m'_0$ genau dann wenn $m_1 n'_1 \leq n_1 m'_1$.

Um ($\Rightarrow$) nachzuweisen, beachte:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot n_1' &\overset{\text{a)}}{=} n_1' \cdot \frac{m_0 \cdot n_1}{n_0} \overset{\text{Annahme}}{\leq} n_1' \cdot \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{n_0 \cdot m_0'}{n_0'} \\ &\overset{\text{b)}}{=} n_1 \cdot m_1'. \end{aligned}$$

Um ($\Leftarrow$) nachzuweisen, beachte:

$$\begin{aligned} m_0 \cdot n_0' &= n_0' \cdot \frac{m_1 \cdot n_0}{n_1} \overset{\text{Annahme}}{\leq} n_0' \cdot \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{n_1 \cdot m_1'}{n_1'} \\ &= n_0 \cdot \frac{n_0' \cdot m_1'}{n_1'} = n_0 \cdot n_1'. \end{aligned}$$

Beweisen Sie Teil (2) selbständig. □

Als nächstes definieren wir die folgenden Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$.

Definition 7.3.4. Für $m, m' \in \mathbb{Z}$ und $n, n' \in \mathbb{Z}_+$ definiere:

$$[(m,n)] \oplus [(m',n')] := [(mn' + nm', nn')] \text{ und } [(m,n)] \otimes [(m',n')] := [(mm', nn')].$$

Aufgabe 8. Zeige, dass die obigen Definitionen unabhängig von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen sind. Das heißt, die Operationen sind wohldefiniert.

Diskussion 7.3.5. Die folgenden Eigenschaften der eingeführten Operationen (Addition, $\oplus$, und Multiplikation, $\otimes$) sind nicht schwer zu überprüfen:

(1) Die Operationen sind assoziativ und kommutativ.
(2) Die Multiplikation ist über die Addition distributiv.
(3) Für alle $[(p,n)] \in \mathbb{Q}$ gelten

$$[(0,1)] \oplus [(p,n)] = [(p,n)] \text{ und } [(-p,n)] \oplus [(p,n)] = [(0,1)].$$

(4) Für alle $[(p,n)] \in \mathbb{Q} \backslash \{[(0,1)]\}$ gelten

$$[(p,n)] \otimes [(n,p)] = [(1,1)] \text{ für } p > 0 \quad \text{und} \quad [(p,n)] \otimes [(-n,-p)] = [(1,1)] \text{ für } p < 0.$$

Behauptung 7.3.6. Die Abbildung $\varphi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto [(a,1)]$ ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

Beweis. Zunächst zeigen wir *Injektivität*: Beachte $(a_1, 1) \sim (a_2, 1)$ gdw $a_1 \cdot 1 = a_2 \cdot 1$. Als nächstes ist $\varphi_{\mathbb{Z}}(a+b) = \varphi_{\mathbb{Z}}(a) \oplus \varphi_{\mathbb{Z}}(b)$ zu überprüfen. Es gilt:

$$[(a,1)] \oplus [(b,1)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 1, 1 \cdot 1)] = [(a+b,1)].$$

Zuletzt wird $\varphi_{\mathbb{Z}}(a \cdot b) = \varphi_{\mathbb{Z}}(a) \oplus \varphi_{\mathbb{Z}}(b)$ überprüft. Nach Definition gilt

$$[(a,1)] \oplus [(b,1)] = [(ab, 1 \cdot 1)] = [(ab,1)]$$

und damit gilt die erwünschte Gleichheit. □

Theorem 7.3.7. *Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben als Teilmenge der rationalen Zahlen beschränkt.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{N}$ sei beschränkt. Dann $\exists (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ mit der Eigenschaft

$$\forall k \in \mathbb{N} : [(k,1)] \leq [(m,n)].$$

Das heißt, $\forall k \in \mathbb{N} : k \cdot n \leq 1 \cdot m$. Sei $k = m+1$. Dann $(m+1) \cdot n = m \cdot n + n \leq m$. Das ergibt

$$m \cdot n + n - m = m \cdot (n-1) + n \leq 0.$$

Das ist ein Widerspruch, da $n - 1 \geq 0$ und damit ist $m \cdot (n-1) + n > 0$. □

Definition 7.3.8. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und sei $\leq$ eine Totalordnung auf K. Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper, falls die Ordnungsrelation mit den Rechenoperationen verträglich ist. Das heißt, die folgenden beiden Ordnungsrelationen gelten: Für alle $q, r, s \in K$ gilt:

(1) $q \leq r \Leftrightarrow q + s \leq r + s$
(2) $q > 0 \wedge r > 0 \Rightarrow qr > 0$.

Bemerkung 7.3.9. Die Eigenschaft (1) in der obigen Definition wird *Ordnungsaxiom O1* genannt und Eigenschaft (2) *Ordnungsaxiom O2* genannt.

Korollar 7.3.10. Die Menge der rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist ein geordneter Körper mit Nullelement $[(0,1)]$ und Einselelement $[(1,1)]$.

Beweis. Siehe Diskussion 7.3.5. □

Bemerkung 7.3.11. Ab jetzt wird die Äquivalenzklasse $[(m,n)]$ mit der uns schon wohl bekannten Bruchnotation $\frac{m}{n}$ bezeichnet.

7.3.1. *Rechenregel in geordneten Körpern.*

Proposition 7.3.12. (Rechenregel in geordneten Körpern) In einem geordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ gelten folgende Aussagen. Seien x, y, z in K:

(1) $x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$.
(2) $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$.
(3) Ist $x \geq 0$ und $y \leq z$, dann folgt $xy \leq xz$.
(4) Ist $x < 0$ und $y \leq z$ dann $xy \geq xz$.
(5) Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$ und daher $1 > 0$.
(6) Ist $0 < x < y$, dann folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis. Fangen wir mit dem Beweis von Teil (1) an. Zunächst wird $(\Rightarrow)$ bewiesen. Es gilt

$$0 \underset{\text{AG},+}{=} x + (-x) \underset{\text{O1}}{\leq} y + (-x) \underset{\text{nach Def.}}{=} y - x,$$

wobei O1 eine Abkürzung für Ordnungsaxiom O1 ist. Um $(\Leftarrow)$ nachzuweisen, beachte:

$$0 \leq y - x \underset{\text{O1}}{\Rightarrow} 0 + x \leq (y - x) + x = y + (-x + x) = y,$$

wobei in der vorletzten Gleichung die Eigenschaften der abelsche Gruppe $(K, +, 0)$ verwendet werden.

Teil (2) folgt aus Teil (1) mit $y := 0$. Tatsächlich lautet (1) dann: $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$.

Als Nächstes beweisen wir Teil (3). Wir betrachten die folgenden drei Fälle:

(1) *Fall 1:* $y = z$. Dann gilt $xy = xz$ trivialerweise.
(2) *Fall 2:* $x = 0$. Dann gilt $0 \cdot y = 0 \cdot z = 0$ wegen Rechenregeln in Ringen.
(3) *Fall 3:* $x > 0$ *und* $y \neq z$. O.B.d.A. sei $y < z$. Dann gilt $0 < z - y$ nach (1). Dann gilt nach dem Ordnungsaxiom O2
$$(z-y) > 0 \wedge (x > 0) \Rightarrow x \cdot (z-y) > 0$$
und damit $xz - xy > 0$. Mit Hilfe von Ordnungsaxiom O1 ergibt sich:
$$0 + xy \leq (xz - xy) + xy$$
und damit gilt $xy \leq xz$.

Teil (4) folgt aus (1) und (3). Tatsächlich: Sei $x < 0$ und $y \leq z$. Dann gilt $(-x) \geq 0$ nach (2). Nach (3) gilt $(-x) \cdot y \leq (-x) \cdot z$. Aus Ordnungsaxiom O1 ergibt sich
$$(-x) \cdot y + x \cdot y \leq (-x) \cdot z + x \cdot y.$$
Aus den Rechenregeln in Ringen folgt:
$$\begin{aligned} (-x+x) \cdot y &\leq (-x \cdot z) + x \cdot x \\ 0 \cdot y &\leq (-x \cdot x) + x \cdot y \\ 0 &\leq (-x \cdot z) + x \cdot y. \end{aligned}$$
Nach dem Ordnungsaxiom O1 gilt:
$$xz \leq ((-xz) + xy) + xz$$
und damit (nach Rechenregeln in Ringen) $xz \leq xy$.

Als Nächstes beweisen wir Teil (5). Nach Definition ist $\leq$ eine Totalordnung und $<$ ist die assoziierte strikte Totalordnung. Daher gilt $x < 0$ oder $x > 0$. Falls $x > 0$, so gilt $x^2 > 0$ wegen Ordnungsaxiom 02. Falls $x < 0$ ist $(-x) > 0$ wegen (2) und $(-x) \cdot (-x) > 0$ gilt wegen des obigen Falls. Nach den Rechenregeln in Ringen gilt $(-x) \cdot (-x) = x^2$. Damit gilt $x^2 > 0$. Nach den Körperaxiomen gilt $1 \neq 0$ und daher gilt $1 \cdot 1 = 1 > 0$.

Um Teil (6) zu beweisen betrachte ein beliebiges x mit $0 < x$. Da $<$ eine strikte Totalordnung ist, gilt $x^{-1} < 0 \vee x^{-1} = 0 \vee x^{-1} > 0$. Der Fall $x^{-1} = 0$ ist unmöglich und $x^{-1} < 0$ führt zu Widerspruch. Tatsächlich folgt $x \cdot x^{-1} \leq 0$ aus $x^{-1} < 0$ und $0 < x$ und damit $1 \leq 0$, was ein Widerspruch zu Teil (5) ist. Daraus folgt $x^{-1} > 0$. Betrachten wir jetzt beliebige x, y mit $0 < x < y$. Dann gelten $0 < x^{-1}$ und $0 < y^{-1}$. Nach dem Ordnungsaxiom O2 gilt $0 < (x^{-1} \cdot y^{-1})$. Es folgt aus (2) und $x < y$, dass $x \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) < y \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1})$ und damit gilt $y^{-1} < x^{-1}$. □

Behauptung 7.3.13. Sei K ein geordneter Körper.

(1) Sei $a \in K$, $1 < a$ und seien $x \geq a$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x^n > a$.
(2) Sei $b \in K$, $0 < b < 1$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Es gilt $b^n < b$.
(3) Seien $0 < b \leq a$ Elemente in K und sei $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Es gilt $b^n \leq a^n$.

7.4. **Die reelle Zahlen.**

Definition 7.4.1. Eine totalgeordnete Menge $(M, \leq)$ heißt ordnungsvollständig, falls jede nicht-leere nach oben (nach unten) beschränkte Teilmenge $E \subseteq M$ ein Supremum $\sup E \in M$ (ein Infimum $\inf E \in M$) hat.

Lemma 7.4.2. Die Menge der rationalen Zahlen ist nicht ordnungsvollständig da

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \wedge x^2 < 2\}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hat.

Beweis. Beachte, dass $1 \in A$ und damit ist $A \neq \emptyset$.

Behauptung. *A ist nach oben beschränkt.*

Beweis. Angenommen $\exists x \in A : x > 2$. Dann gilt nach den Rechenregeln in Körpern $x^2 \geq 2x$ und $4 \leq 2x$. Die Relation ist transitiv und damit $4 \leq x^2$. Nach Annahme ist $x \in A$, was $x^2 < 2$ ergibt. Daraus folgt $4 < 2$, was offensichtlich ein Widerspruch ist! Es folgt $\forall x \in A : x \leq 2$. □

Angenommen $\mathbb{Q}$ sei ordnungsvollständig. Betrachte $m := \sup A \in \mathbb{Q}$ und sei

$$c := m - \frac{m^2 - 2}{m + 2} = \frac{2m + 2}{m + 2}.$$

Damit gilt $c > 0$, $c \in \mathbb{Q}$. Man beachte $c^2 - 2 = \frac{2(m^2-2)}{(m+2)^2}$. Es bestehen genau zwei Möglichkeiten. Entweder ist $m^2 > 2$ oder $m^2 < 2$.

Betrachten wir den Fall $m^2 > 2$. Dann gilt $c^2 > 2$. Außerdem gilt:

Behauptung. *Sei $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ und $x^2 > 2$. Dann ist x eine obere Schranke für A.*

Beweis. Angenommen $\exists a \in A : x < a$. Dann gelten nach den Rechenregeln in Körpern $x^2 \leq xa$ und $xa \leq a^2$. Die Relation $\leq$ ist transitiv und damit gilt $x^2 \leq a^2 < 2$, was $x^2 > 2$ widerspricht. □

Dann ist c eine obere Schranke für A und auch ist $c < m$ (da $\frac{m^2-2}{m+2} > 0$), was in Widerspruch zu $m = \sup A$ steht.

Als Nächstes betrachten wir den Fall $m^2 < 2$. Dann gilt $c^2 < 2$ und damit ist $c \in A$. Daraus folgt $c < m$. Wegen der Definitionsgleichung von c gilt aber auch $c > m$. Widerspruch! □

Theorem 7.4.3. *(Richard Dedekind) Es existiert ein ordnungsvollständiger geordneter Körper $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper enthält und der, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Die Menge $\mathbb{R}$ wird Menge der reellen Zahlen genannt. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ werden irrationale Zahlen genannt.*

Theorem 7.4.4. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten:*

(1) *(Archimedische Eigenschaft) $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$.*
(2) *(Dichtheit) $x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$. Ferner gibt es ein $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x < r < y$.*

Beweis. Um (1) zu beweisen, nehmen wir an, dass $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben durch y beschränkt ist. Sei $\alpha := \sup A$. Es gilt $\alpha - x < \alpha$ und nach Definition von Supremum ist $\alpha - x$ keine obere Schranke von A. Das heißt, $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha - x < nx$ und damit gilt auch $\alpha < (n+1)x$. Das Letztere widerspricht aber der Tatsache, dass α eine obere Schranke von A ist.

Als Nächstes beweisen wir Teil (2). Sei $x<y$ und damit $y-x>0$. Nach Teil (1) gibt es $n\in\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $n(y-x)>1$. Beachte, dass $n\neq 0$. Betrachte jetzt die Zahlen 1, nx. Da $1>0$, können wir (1) wieder anwenden um $m_1\in\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $m_1(=m_1\cdot 1)>nx$ zu finden. Ähnlich,

$$\exists m_2\in\mathbb{N}: m_2>-nx.$$

Zusammengefasst gilt $-m_2<nx<m_1$. Betrachte $M:=\{k\in\mathbb{Z}: nx<k\}$. Dann ist $m_1\in M$ und $-m_2$ ist eine untere Schranke von M. Nach den Eigenschaften der ganzen Zahlen besitzt M ein kleinstes Element m und damit gilt $m-1\leq nx<m$. Daraus folgt $nx<m$ und $m\leq nx+1<ny$. Dann gilt $nx<m<ny$. Es folgt $x<\frac{m}{n}<y$, da $n>0$.

Um die Existenz der gewünschten Zahl $r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nachzuweisen wenden wir das obige Argument auf $x<y$ an, um ein $q_1\in\mathbb{Q}$ mit $x<q_1<y$ zu finden und noch einmal auf $q_1<y$ an, um ein $q_2\in\mathbb{Q}$ mit $x<q_1<q_2<y$ auszuwählen. Sei $r:=q_1+\frac{q_2-q_1}{2}\cdot\sqrt{2}$. Da $q_2>q_1$, gilt $r>q_1$. Ferner beachte, dass r irrational ist (sonst wäre $\sqrt{2}$ rational!). Außerdem ist $q_2-r=(q_2-q_1)(1-\frac{1}{\sqrt{2}})>0$ und damit $r<q_2$. □

Diskussion 7.4.5. Wenn $y>0$ und $y^2=2$, dann gilt $1<y$. Stimmt das? Können Sie es beweisen? Wäre $y\leq 1$, dann $y^2\leq 1$ und somit $2\leq 1$, was offensichtlich ein Widerspruch ist! Haben wir die Ungleichung $1<\sqrt{2}$ im obigen Beweis verwendet?

Proposition 7.4.6. (Existenz und Eindeutigkeit der Wurzel) Für alle $a\in\mathbb{R}$ mit $a>0$ und alle positiven $n\in\mathbb{N}$ gibt es genau ein $x\in\mathbb{R}$ mit $x>0$ und $x^n=a$.

Beweis. Eindeutigkeit Angenommen $c\neq b$ seien Lösungen der Gleichung. O.b.d.A. gilt $a<b$. Man beachte:

Behauptung. Seien $0<x<y$. Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}: x^n<y^n$.

Beweis. Mit vollständigen Induktion. *Induktionsanfang* Es gilt $x^1<y^1$. *Induktionsannahme* Es gelte $x^n<y^n$. *Induktionsschritt* Nach den Rechenregeln in den Körpern gilt $x\cdot x^n\leq x\cdot y^n$. Wäre $x\cdot x^n=x\cdot y^n$, dann ist $x^n=y^n$ ein Widerspruch. Das heißt, $x^{n+1}<x\cdot y^n$. Andererseits folgt aus $x<y$ auch $x\cdot y^n<y\cdot y^n$ und damit $x\cdot y<y^{n+1}$. Nach Transitivität der Ordnungsrelation folgt $x^{n+1}<y^{n+1}$. □

Nach der obigen Behauptung gilt $c^n\neq b^n$, was ein Widerspruch ist.

Existenz Wenn $n=1$ oder $a=1$, ist die Existenz einer Lösung der Gleichung $x^n=a$ offensichtlich. Also, nehmen wir an, dass $a>1$, $n>1$. Betrachte die Menge

$$A:=\{x\in\mathbb{R}: x>0\wedge x^n\leq a\}.$$

Dann gilt $1\in A$ und damit $A\neq\emptyset$. Man beachte, das gilt:

Behauptung. Sei $x\in\mathbb{R}$, $x>0$ und $x^n>a$. Dann ist x eine obere Schranke für A.

Beweis. Angenommen $\exists y\in A: x<y$. Da $0<x<y$, es folgt nach den Rechenregeln in Körpern $x^n\leq y^n$ (siehe Behauptung 7.3.13). Es folgt $a<x^n\leq y^n\leq a$. Widerspruch! □

Nach Behauptung 7.3.13 gilt $a^n>a$ und damit ist nach der obigen Behauptung a eine obere Schranke von A. Damit existiert $s=\sup A$. Wir möchten zeigen, dass $s^n=a$ gilt. Also nehmen wir an, dass das nicht der Fall ist. Dann bestehen zwei Möglichkeiten: $s^n<a$ oder $s^n>a$.

Angenommen $s^n < a$. Dann ist $a - s^n > 0$ und nach der Dichtheit der Ordnungsrelation gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ so dass

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{a-s^n}{(s+1)^n}\right\}.$$

Man beachte, dass nach Behauptung 7.3.13 $\varepsilon^n < \varepsilon$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(s+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} + s^n \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k + s^n \\
&= \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k + \varepsilon s^n - \varepsilon s^n + s^n \\
&= \varepsilon(1+s)^n + (1-\varepsilon)s^n \\
&< \varepsilon(1+s)^n + s^n \\
&< \left(\frac{a-s^n}{(s+1)^n}\right)(1+s)^n + s^n \\
&= a - s^n + s^n = a.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $s+\varepsilon > 0$ und damit nach der obigen Ungleichung $(s+\varepsilon) \in A$. Es folgt, dass $(s+\varepsilon) \leq s$ in Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.

Angenommen $s^n > a$. Wähle ε mit $0 < \varepsilon < \min\left\{1, s, \frac{s^n-a}{(s+1)^n}\right\}$. Nach Behauptung 7.3.13 gilt $\varepsilon^n < \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(s-\varepsilon)^n &= s^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} s^{n-k} \cdot (-\varepsilon)^k \\
&\geq s^n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} s^{n-k} \cdot \varepsilon^k \\
&\geq s^n - \left(\varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} s^{n-k} + \varepsilon \cdot 1 - \varepsilon \cdot 1\right) \\
&= s^n - \left(\varepsilon(1+s)^n - \varepsilon \cdot 1\right) \\
&= s^n - \varepsilon(1+s)^n + \varepsilon \\
&> s^n - \left(\frac{s^n - a}{(s+1)^n}\right) \cdot (s+1)^n + \varepsilon \\
&= s^n - (s^n - a) + \varepsilon \\
&> s^n - (s^n - a) = a
\end{aligned}$$

Dann $(s-\varepsilon) > 0$, $(s-\varepsilon) < s$ und damit ist $s-\varepsilon$ keine obere Grenze von A. Das heißt,

$$\exists x \in A : (s-\varepsilon) < x.$$

Dann aber $(s-\varepsilon)^n \leq x^n$ (siehe Behauptung 7.3.13). Daraus folgt $a < (s-\varepsilon)^n \leq x^n \leq a$. Widerspruch!

Was uns übrig ist, ist die Möglichkeit $s^n = a$ und damit ist s die Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Schließlich betrachten wir den Fall $a < 1$. Dann

$$\exists y \in \mathbb{R} : y^n = \frac{1}{a}.$$

Es gilt aber $(\frac{1}{y})^n = a$ und damit ist der Satz bewiesen. □

Proposition 7.4.7. (Monotonie der Wurzelfunktion) Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und sei

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Dann ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[n]{x}$ streng monoton wachsend.

Beweis. Seien $0 < x < y$, $a := \sqrt[n]{x}$ und $b := \sqrt[n]{y}$. Angenommen $b \leq a$ gilt. Nach Behauptung 7.3.13 gilt $x = a^n \geq b^n = y$, ein Widerspruch zu $x < y$. □

Definition 7.4.8. (Algebraische reelle Zahl) Eine reelle Zahl r heißt algebraisch, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und rationale Zahlen $a_0, \cdots, a_n$ mit $\sum_{i=0}^n a_i r^i = 0$ gibt.

Da es nur abzählbar viele Polynome mit rationalen Koeffizienten gibt, gibt es nur abzählbar viele algebraische Zahlen. Die Menge der algebraischen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_a$ bezeichnet. Daraus folgt, dass $\mathbb{R}_t := \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}_a$ überabzählbar ist. Die Elemente von $\mathbb{R}_t$ heißen transzendente Zahlen. Zum Beispiel sind π und e in $\mathbb{R}_t$.

Definition 7.4.9. (Absolutbetrag, Abstand und Signum) Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) Wir definieren den Absolutbetrag, oder einfach Betrag von x durch $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

(2) Der Abstand von x und y ist definiert als die Zahl $|x-y|$.

(3) Das Vorzeichen oder Signum von x ist definiert als $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

Diskussion 7.4.10. Wenn $x \geq y$, dann gilt $|x-y| = x-y$ und wenn $x < y$, dann gilt $|x-y| = y-x$. Es gilt auch die so genannte Spiegelungssymmetrie

$$|x| = |-x| \text{ und } |x-y| = |y-x|.$$

Proposition 7.4.11. (Eigenschaften von Betrag und Abstand) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(1) (positive Definitheit) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(2) (Dreiecksungleichung) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
(3) (Multiplikativität) $|xy| = |x||y|$,
(4) (positive Definitheit) $|x-y| \geq 0$ und $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
(5) (Dreiecksungleichung) $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.

7.5. **Die komplexen Zahlen.**

Definition 7.5.1. (die komplexen Zahlen) Wir definieren $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und erklären auf dieser Menge die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie folgt:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \text{ und } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Proposition 7.5.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beweis. Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement $(0,0)$ ist. Das additive Inverse zu (a_1, a_2) ist $(-a_1, -a_2)$. Außerdem ist $(\mathbb{C} \backslash \{(0,0)\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit Einselement $(1,0)$. Das multiplikative Inverse zu $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ ist das Element $\left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)$. Tatsächlich:

$$(a_1, a_2) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_1 a_2 + a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2}\right) = (1,0).$$

Insbesondere ist das Inverse zu $(x,0)$ das Element $(\frac{1}{x}, 0)$. Es ist noch zu zeigen, dass das Distributivgesetz bezüglich der eingeführten Operationen gilt. Seien (a_1, a_2), (b_1, b_2) und (c_1, c_2) in $\mathbb{C}$ beliebig. Aus den Definitionen und dem Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2)((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) \overset{\text{nach Def.}}{=} (a_1, a_2)(b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&\overset{\text{nach Def.}}{=} (a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2), a_1(b_2 + c_2) + a_2(b_1 + c_1)) \\
&\overset{\text{in } \mathbb{R}}{=} (a_1 b_1 + a_1 c_1 - a_2 b_2 - a_2 c_2, a_1 b_2 + a_1 c_2 + a_2 b_1 + a_2 c_1) \\
&\overset{\text{nach Def.}}{=} (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 c_1 - a_2 c_2, a_1 c_2 + a_2 c_1) \\
&\overset{\text{nach Def.}}{=} (a_1, a_2)(b_1, b_2) + (a_1, a_2)(c_1, c_2).
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.5.3. Die Abbildung $j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $j(r) = (r, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Beweis. Um Injektivität zu beweisen beachte, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x,0) = (y,0) \Rightarrow x = y.$$

Die Abbildung verträgt die algebraischen Operationen, da

$$j(x) + j(y) \overset{\text{nach Def.}}{=} (x,0) + (y,0) \overset{+, \mathbb{C}}{=} (x + y, 0) \overset{\text{nach Def.}}{=} j(x + y)$$

und

$$j(x) \cdot j(y) = (x,0) \cdot (y,0) = (xy + 0 \cdot 0, x \cdot 0 - 0 \cdot y) = (xy, 0) = j(xy).$$

gelten. □

Insbesondere ist $\mathbb{R}$ isomorph zu

$$j(\mathbb{R}) = \{(r,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

und damit können wir $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit dem Unterkörper

$$(j(\mathbb{R}),+,\cdot) \text{ von } (\mathbb{C},+,\cdot)$$

identifizieren.

Theorem 7.5.4. *Es gibt keine Ordnungsrelation auf* $\mathbb{C}$ *mit der* $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *ein geordneter Körper wird.*

Beweis. Angenommen $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass

$$(\mathbb{C},+,\cdot,\leq)$$

ein geordneter Körper ist. Dann gilt $(0,) < (1,0)$. Für das additive Inverse $(-1,0)$ von $(1,0)$ gilt nach den Rechenregeln eines geordnetes Körpers $(-1,0) < (0,0)$. Andererseits gilt

$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0).$$

In jedem geordneten Körper gilt aber $\forall x : x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Es folgt $(0,1)^2 = (-1,0) > (0,0)$, was offensichtlich in Widerspruch zu $(-1,0) < (0,0)$ steht. □

Definition 7.5.5. Das Element $(0,1)$ wird mit **i** bezeichnet und wird die **imaginäre Einheit genannt.**

Definition 7.5.6. (Real- und Imaginärteil) Sei $z = (x,y) \in \mathbb{C}$. Dann schreiben wir z auch als

$$z = x + iy.$$

Dann wird x den Realteil und y den Imaginärteil von z genannt. Wir schreiben

$$x = \operatorname{Re} z = \Re z \text{ und } y = \operatorname{Im} z = \Im z.$$

Die Darstellung $z = x + iy$ wird die kartesischen Darstellung der komplexen Zahl z genannt.

Diskussion 7.5.7. Es ergeben sich die folgenden Regeln:

(1) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
(2) $(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

Jede komplexe Zahl $x + iy$ kann mit dem Punkt

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

identifiziert werden. Damit erhalten wir die Polardarstellung der komplexen Zahlen.

Definition 7.5.8. (Betrag, Polardarstellung komplexer Zahlen) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Der Absolutbetrag oder Betrag von z ist durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert. Für $z \neq 0$ wird das Argument von z, bezeichnet mit $\arg(z)$, folgenderweise definiert:

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Die Polardarstellung der Zahl z ist dann

$$z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z)).$$

Diskussion 7.5.9. (Multiplizieren und Inverse komplexer Zahlen in der Polardarstellung) Die Polardarstellung der komplexen Zahlen ergibt das Folgendes:

Multiplizieren Seien $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2(\underbrace{\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)}) + i(\underbrace{\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)}) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Um den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ im Bereich $[-\pi, \pi)$ zu behalten sollte $\pm 2\pi$ addiert werden (wenn notwendig).

Inverse Das Inverse von $z = r(\cos \varphi + i \sin(\varphi))$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Diskussion 7.5.10. Division in der kartesischen Darstellung

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)^{-1} &= (a_1 + ib_1) \cdot \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{-ib_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Man beachte, das gilt:

$$
\begin{aligned}
(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)^{-1} &\overset{\text{nach Def.}}{=} \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} \\
&\overset{\text{multip. mit 1}}{=} \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} \\
&\overset{\text{bearbeiten}}{=} \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2} \\
&\overset{\text{bearbeiten}}{=} \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.
\end{aligned}
$$

Die Brüche $\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}$ ergibt oft einen schnelleren Weg $(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)^{-1}$ zu berechnen.

Definition 7.5.11. (Konjugiert komplexe Zahl)
Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Die zu z konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ wird folgenderweise definiert $\overline{z} := x-iy$.

Lemma 7.5.12. Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Es gelten:

(1) $z\cdot\overline{z} = |z|^2$
(2) $\overline{\overline{z}} = z$
(3) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
(4) $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
(5) $z+\overline{z} = 2\Re(z)$
(6) $\Re(z) = \Re(\overline{z})$
(7) $\Im(\overline{z}) = -\Im(z)$.

Beweis. (1) Sei $z = (x,y) = x+iy$. Dann $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-ixy+ixy+y^2 = x^2+y^2$.
Teil (2) gilt nach Definition.
(3) Seien $z_1 = x_1+iy_1$ und $z_2 = x_2+iy_2$. Dann ist $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} &= (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) \\
&= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2) \\
&= \overline{z_1}+\overline{z_2}.
\end{aligned}
$$

Teil (4) ist ähnlich zu überprüfen.
(5) Sei $z = x+iy$. Dann gilt $z+\overline{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2x$.
Teile (6) und (7) sind offensichtlich. $\square$

Beispiel 7.5.13. Bestimme den Real- und Imaginärteil von $z = \frac{1+i}{1-i}$. Man beachte

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\\ &= \frac{1+2i-1}{2}\\ &= i.\end{aligned}$$

Theorem 7.5.14. *(Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p(z)$ ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten*

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

mit $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $a_n \neq \emptyset$. Dann existiert $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) = 0$.

Definition 7.5.15. Ein Körper K heißt **algebraisch abgeschlossen**, falls jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten in K wenigstens eine Nullstelle hat.

Bemerkung 7.5.16. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen.

Diskussion 7.5.17. (Nullstellen eines komplexen quadratischen Polynoms) Sei

$$p(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

gegeben. Dann kann man die Nullstellen von p mit Hilfe der folgenden wohl bekannten Formel bestimmen:

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0}}{2\alpha_2}.$$

Beispiel 7.5.18. Löse die Gleichungen:

(1) $z^2 + 2z + 10 = 0$
(2) $z^2 - 2iz + 3 = 0$

Beweis. (1) Nach der Formel gilt $z_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm \sqrt{(3i)^2}$. Daher sind $z_1 = -1+3i$ und $z_2 = -1-3i$ die Lösungen der Gleichung. Überprüfen:

$$\begin{aligned}(z-z_1)(z_1-z_2) &= z^2 - zz_2 - z_1 z + z_1 z_2\\ &= z^2 - z(z_1+z_2) + z_1 z_2\\ &= z^2 + 2z + 10.\end{aligned}$$

(2) Nach der Formel gilt $z_{1,2} = \frac{2i\pm\sqrt{4i^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = i \pm \sqrt{-4} = i \pm \sqrt{(2i)^2}$. Daher sind

$$z_1 = i + 2i = 3i \text{ und } z_2 = i - 2i = -i$$

die Lösungen der Gleichung. Überprüfen:

$$\begin{aligned}(z-z_1)(z_1-z_2) &= (z-3i)(z+i)\\ &= z^2-2iz+3.\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.5.19. Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^2-(3-8i)z-13-11i$.

Beweis. Man beachte $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -(3-8i)$, $\alpha_0 = -(13+11i)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}z_{1,2} &= \frac{3-8i \pm \sqrt{(3-8i)^2+4(13+11i)}}{2}\\ &= \frac{3-8i \pm \sqrt{-55-48i+52+44i}}{2}\\ &= \frac{3-8i \pm \sqrt{-3-4i}}{2}\end{aligned}$$

Wir müssen noch den Wert von $\sqrt{-3-4i}$ bestimmen. Sei $\sqrt{-3-4i} = a+ib$, wobei a, b unbestimmt sind. Das führt zum Gleichungssystem

$$a^2-b^2 = -3,\ 2ab = -4.$$

Man beachte, dass $a^2+b^2 = |a+ib|^2 = |(a+ib)^2| = \sqrt{9+14} = 5$. Das ergibt

$$(a^2-b^2)+(a^2+b^2) = 2a^2 = -3+5 = 2$$

und

$$a^2+b^2-a^2+b^2 = 2b^2 = 5+3 = 8.$$

Daraus folgt $a = \pm 1$ und $b = \pm 2$. Die Beziehung $2ab = -4$ ergibt zwei Möglichkeiten, $a = 1$ und $b = -2$, oder $a = -1$ und $b = 2$ und daher gilt

$$\sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i).$$

Eingesetzt in der Lösungsformel ergibt das:

$$z_{1,2} = \frac{3-8i \pm (1-2i)}{2}$$

und damit $z_1 = 2-5i$, $z_2 = 1-3i$. □

8. Folgen und Reihen

8.1. **Folgen reeller Zahlen.**

Behauptung 8.1.1. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Nach dem Archimedischen Axiom existiert $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{\varepsilon} < N$ und damit gilt

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

□

Behauptung 8.1.2. (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $x = -1$. Dann $(1+x)^0 = 1$ und $1+nx = 1+0 = 1$. Andererseits $(1+(-1))^2 = 0$, $1+2.(-1) = -1$ und $0 \geq -1$. Im Allgemeinen gilt $(1+(-1))^n = 0$ und $1+n\cdot(-1) \leq 0$ für alle $n \geq 1$. Daher gilt die Ungleichung für $x = -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Ab jetzt nehmen wir an, dass $x > -1$ gilt.

Induktionsanfang Sei $n = 0$. Dann $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1$ und $1+n\cdot x = 1$. Es gilt $1 \geq 1$ und damit gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme Es gelte $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$.

Induktionsschritt Es gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)^n\cdot(1+x) &\geq (1+nx)\cdot(1+x) \\
&= 1+x+nx+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x.
\end{aligned}$$

□

Behauptung 8.1.3. (Wachstum von Potenzen)

(1) Sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$. Es gilt
$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : b^n > K.$$

(2) Sei $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$. Dann gilt
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : b^n < \varepsilon.$$

Beweis. Um Teil (1) zu beweisen betrachte $x := b-1$. Dann gilt $x > 0$ und nach Behauptung 8.1.2 gilt
$$b^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N\cdot x > K-1$ und damit gilt $1+N\cdot x > K$. Es ergibt sich, dass für alle $n \geq N$
$$b^n = (1+x)^n \geq 1+nx > K$$
gilt.

Um Teil (2) zu beweisen, betrachte $a := \frac{1}{b}$. Dann gilt $a > 1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $K := \frac{1}{\varepsilon}$. Nach Teil (1) existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a^N > K$ und damit gilt
$$\frac{1}{a^N} = b^N < \varepsilon.$$

□

Definition 8.1.4. Sei M eine Menge. Üblicherweise wird sie $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, oder $\mathbb{Q}$ sein und wir sprechen von Folgen reeller, bzw. ganzen oder rationalen Zahlen. Sei $f : \mathbb{N} \to M$. Wir betrachten f als eine Verallgemeinerung endlicher n-Tupel und nennen die Abbildung f eine Folge mit Folgengliedern a_n, wobei $a_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_0, a_1, a_2, \cdots).$$

Als Definitionsbereich von f, mit anderen Worten als Indexmenge, wird oft auch die Menge $\mathbb{Z}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ verwendet. In dem Fall wird auch die Schreibweise

$$(a_n)_{n\geq k} \quad \text{oder} \quad (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots)$$

verwendet.

Beispiel 8.1.5.

(1) Sei c eine beliebige Zahl. Die Folge

$$(c, c, c, \cdots)$$

mit Folgenglieder $a_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt *die konstante Folge*.

(2) Für jedes $n \geq 1$ sei $a_n := \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots).$$

(3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgende Folge in $\mathbb{Z}$:

$$(+1, -1, +1, -1, \cdots)$$

(4) Betrachte die Folge

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots).$$

Dann gilt $a_n = \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Das ist eine Folge rationaler Zahlen.

(5) Die Folge mit Folgenglieder $a_n := \frac{n}{2^n}$ ist die Folge

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \cdots).$$

(6) Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* ist die folgenderweise rekursiv-definierte Folge:

$$a_0 := 0, a_1 := 1 \quad \text{und} \quad f_n := f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Dann gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots)$.

(7) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wird

$$(1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots)$$

die *Folge der Potenzen* von x genannt.

Definition 8.1.6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$ falls die folgenden *Konvergenz-Bedingung* erfüllt wird:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

In dem Fall wird die Zahl a der Grenzwert oder Limes der Folge (a_n) genannt und man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad \lim a_n = a \quad \text{oder}$$

$$a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, mit der Eigenschaft, dass (a_n) gegen a konvergent ist. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Diskussion 8.1.7. Man beachte, dass die Zahl N von ε abhängt. Im Allgemeinen gilt die folgende Regel: je kleiner ε wird, desto größer wird die Zahl N. Wenn

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt, sagt man "a_n strebt gegen a für n gegen unendlich".

Definition 8.1.8. Seien $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Das Intervall

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

wird eine *ε-Umgebung von a* genannt und auch manchmal durch U_ε bezeichnet.

Diskussion 8.1.9. Eine ε-Umgebung einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge aller Punkte, die einen Abstand kleiner als ε zu a haben. Mit Hilfe des Begriffes einer ε-Umgebung können wir die Konvergenz-Bedingung und die Definition einer konvergenten Folge umformulieren: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$, $a_n \in U_\varepsilon$ gilt.* Mit anderen Worten sind für jedes $\varepsilon > 0$ *fast alle* (das heißt, alle außer endlich vielen) Folgenglieder(n) a_n, Elemente der ε-Umgebung $U_\varepsilon = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Behauptung 8.1.10. Sei c eine beliebige Zahl. Die konstante Folge $(c, c, c, \cdots)$ konvergiert gegen c.

Beweis. Die Konvergenz-Bedingung ist trivialerweise erfüllt, da alle Folgenglieder Elemente jeder ε-Umgebung von c sind. □

Behauptung 8.1.11. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wobei $a_n = \frac{1}{n}$, konvergiert gegen 0.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Damit gilt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ in der ε-Umgebung U_ε von a liegen. □

Definition 8.1.12. Eine konvergente Folge mit Limes 0 wird auch Nullfolge genannt.

Behauptung 8.1.13. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent.

Beweis. Nehmen wir an, dass die Folge (a_n) gegen eine reelle Zahl a konvergiert. Betrachten wir die 1-Umgebung von a, das heißt die ε-Umgebung U_ε wobei $\varepsilon = 1$ gilt. Nach Definition existiert N mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq N$ die Folgenglieder a_n Elemente von U_1 sind. Das heißt

$$|a_n - a| < 1$$

für alle $n \geq N$. Sei $n \geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 = |a_{n+1} - a_n| &= |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| \\ &< 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. □

Behauptung 8.1.14. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \frac{n}{n+1}$, ist konvergent mit Grenzwert 1. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Archimedischen Axiom existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Das heißt, dass alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ Elemente von U_ε sind. □

Behauptung 8.1.15. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \frac{n}{2^n}$ konvergiert mit Grenzwert 0. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion kann man beweisen, dass $n^2 \leq 2^n$ für alle $n > 3$ gilt. Betrachte jetzt ein beliebiges $n > 3$. Dann gilt

$$\frac{n^2}{2^n} \leq 1$$

und damit $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ gilt. Als nächstes sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Archimedischen Axiom existiert

$$N > \max\{3, \frac{1}{\varepsilon}\}$$

und damit gilt für alle $n \geq N$,

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Das heißt, dass alle Folgenglieder mit Index $n \geq N$ Elemente von der ε-Umgebung von 0 sind. □

Definition 8.1.16. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt:

(1) beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(2) nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
(3) nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $K \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 8.1.17. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Betrachte die ε-Umgebung U_ε von a, für $\varepsilon = 1$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq N$, $a_n \in U_1$ gilt. Das heißt, für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < 1.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}|a_n| &= |(a_n + a - a)| \\ &\leq |a| + |a_n - a| \\ &< |a| + 1\end{aligned}$$

für alle $n \geq N$. Sei jetzt $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Diskussion 8.1.18.

(1) Man beachte, dass es beschränkte Folgen gibt, die nicht konvergent sind.

(2) Die Fibonacci-Folge ist divergent, da sie nicht beschränkt ist. Man beachte, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.
(3) Die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist:
- divergent falls $|x| > 1$, da (x^n) in diesem Fall nicht beschränkt ist;
- konvergent falls $|x| < 1$ und $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$;
- konvergent falls $x = 1$, da $x^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- divergent falls $x = -1$.

Theorem 8.1.19. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Angenommen a und b sind Grenzwerte der gegebenen Folge mit $a \neq b$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ und die ε-Umgebungen $U_a = \{x : |a-x| < \varepsilon\}$ und $U_b = \{x : |b-x| < \varepsilon\}$ sind disjunkt. Um das zu beweisen, betrachte ein $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|a-b| &= |(a-x+x-b)|\\ &\leq |a-x| + |b-x|\\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|,\end{aligned}$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Andererseits existieren nach Definition natürlichen Zahlen N_a und N_b, so dass
- für alle $n \geq N_a$, $|a - a_n| < \varepsilon$, und
- für alle $n \geq N_b$, $|b - a_n| < \varepsilon$

gelten. Sei $n > \max\{N_a, N_b\}$. Dann ist $a_n \in U_a \cap U_b$, was ein Widerspruch zu $U_a \cap U_b = \emptyset$ ist. □

8.2. **Rechenregeln konvergenter Folgen.**

Theorem 8.2.1. *(Rechenregeln konvergenter Folgen) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten bzw. a und b.*
(1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty} b_n).$$
(2) Die Produktfolge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n).$$
(3) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n.$$
(4) Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{gdw.} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$
(5) Wenn $b \neq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist die Quotientenfolge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0}$ konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Zunächst beweisen wir Teil (1). Zu zeigen ist $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$. Betrachten wir eine beliebige ε-Umgebung von $(a+b)$. Das heißt, wir fixieren ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\forall n \geq N : |(a+b)-(a_n+b_n)| < \varepsilon$$

Man beachte, dass nach der Dreiecks-Ungleichung $|(a+b)-(a_n+b_n)| \leq |a-a_n|+|b-b_n|$ und damit ist es ausreichend ein $N \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass

$$\left(\forall n \geq N : |a-a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ und } \left(\forall n \geq N : |b-b_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Übrigens existieren nach Definition eines Limes Zahlen N_a und N_b in $\mathbb{N}$, so dass:

- $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_a$, und
- $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_b$.

Sei $N = \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}|(a+b)-(a_n+b_n)| &\leq |a-a_n|+|b-b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon,\end{aligned}$$

wie erwünscht.

Als nächstes beweisen wir Teil (2). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir such nach einer natürlichen Zahl N mit der Eigenschaft

$$\forall n \geq N : |a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

Man beachte, dass

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

gilt. Außerdem können die Differenzen $|b_n - b|$ und $|a_n - a|$ beliebig klein sein und die Menge $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Insbesondere gibt es eine Konstante K, so dass $|a_n| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit gilt

$$|a_n(b_n-b)+b(a_n-a)| \leq |a_n||b_n-b|+|b||a_n-a| \leq K\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a|.$$

Sei $K_1 > \max\{K, |b|\}$ und seien N_a, N_b in $\mathbb{N}$, so dass

- $\forall n \geq N_a : |a-a_n| < \frac{\varepsilon}{2\cdot K_1}$,
- $\forall n \geq N_b : |b-b_n| < \frac{\varepsilon}{2\cdot K_1}$.

Sei jetzt $n > \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &\leq K\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a| \\ &< K\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot K_1}+|b|\frac{\varepsilon}{2\cdot K_1} \\ &= \frac{K}{K_1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|b|}{K_1}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{da } \frac{K}{K_1} < 1,\ \frac{|b|}{K_1} < 1\right) \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Teil (3) ist ziemlich leicht zu beweisen! Tatsächlich ist $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt der konstante Folge (λ) mit der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ähnlich ist die Folge $(\mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt der konstanten Folge (μ) mit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Teil (2) sind die Folgen $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwerten $\lambda\cdot a$ und $\mu\cdot b$. Nach Teil (1) ist die Folge $(\lambda a_n+\mu b_n)$ auch konvergent mit Grenzwert $\lambda a+\mu b$.

Als nächstes beweisen wir Teil (4). Angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$. Nach Teil (3) für $\lambda=1,\mu=-1$ ist die Folge $(1\cdot a_n+(-1)\cdot b_n)$ konvergent mit Limes $a-b=0$. Das heißt (a_n-b_n) ist eine Nullfolge. Nehmen wir als nächstes an, dass (a_n-b_n) eine Nullfolge ist. Da $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen sind, folgt aus Teil (3) mit $\lambda=\mu=1$, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(1\cdot(a_n-b_n)+1\cdot b_n)=0+b=b.$$

Der Limes einer konvergenten Folge ist aber eindeutig bestimmt und damit gilt $a=b$.

Als nächstes beweisen wir Teil (5). Da $b\neq 0$ gilt, existiert nach Definition $n_0\in\mathbb{N}$ mit $|b_n-b|<\frac{|b|}{2}$ für alle $n\geq n_0$. Dann gilt

$$|b_n|>\frac{|b|}{2}$$

und daher $b_n\neq 0$ für alle $n\geq n_0$. Nehmen wir an, dass $a_n=1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und betrachten wir ein beliebiges $\varepsilon>0$. Nach Definition eines Limes existiert $N_1\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\geq N_1$

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon|b|^2}{2}$$

gilt. Sei $N:=\max\{n_0,N_1\}$. Dann gilt für $n\geq N$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| &= \frac{1}{|b_n|\cdot|b|}|b-b_n| \quad \left(\text{beachte, dass } \frac{1}{|b_n|}<\frac{2}{|b|} \text{ und } |b_n-b|<\frac{\varepsilon|b|^2}{2}\right)\\ &< \frac{2}{|b|}\cdot\frac{1}{|b|}\cdot\frac{\varepsilon|b|^2}{2}\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\lim\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$.

Um den allgemeinen Fall zu erhalten, beachte dass man die Quotientenfolge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ als die Produktfolge $(\frac{1}{b_n}\cdot a_n)$ betrachten kann. Nach Teil (3) gilt dann $\lim\frac{a_n}{b_n}=(\lim\frac{1}{b_n})\cdot(\lim a_n)=\frac{1}{b}\cdot a=\frac{a}{b}$. □

Beispiel 8.2.2. Sei $a_n=\frac{3n^2+13n}{n^2-2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Man beachte, dass für $n>0$ es gilt

$$a_n=\frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}.$$

Aus den Rechenregeln für Limites folgt

$$\lim_{n\to\infty}(3+\frac{13}{n})=3 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})=1.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim(3+\frac{13}{n})}{\lim(1-\frac{2}{n^2})}=\frac{3}{1}=3.$$

Theorem 8.2.3. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$.*

(1) Ist $a_n \leq b_n$ für alle n, dann gilt $a \leq b$.

(2) Ist $a = b$ und ist (c_n) eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist (c_n) konvergent und $\lim c_n = a = b$.

Beweis. Um Teil (1) zu beweisen, betrachten wir die Folge (c_n), wobei $c_n = b_n - a_n$. Dann gilt $\lim c_n = \lim b_n - \lim a_n = b - a$. Damit genügt es zu beweisen, dass $\lim c_n \geq 0$ gilt. Angenommen $c = \lim c_n < 0$ gilt. Sei $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Nach Definition existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall n \geq N : c_n \in U_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = (-\frac{3|c|}{2}, -\frac{|c|}{2}).$$

Damit gilt $c_n < 0$ für jedes $n \geq N$. Sei $n > N$ fixiert. Dann gilt $c_n = b_n - a_n < 0$. Daraus folgt $b_n < a_n$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Um Teil (2) zu beweisen, zeigen wir direkt, dass $\lim c_n = a (= b)$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen nach ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N : |a - c_n| < \varepsilon$$

gilt. Man beachte, dass gilt

$$|a - c_n| = |(a - a_n) + (a_n - c_n)| \leq |a - a_n| + |a_n - c_n|.$$

Der Abstand $|a - a_n|$ kann nach Definition beliebig klein sein! Der Abstand zwischen a_n und c_n kann auch beliebig klein sein, da nach Voraussetzung $c_n \in (a_n, b_n)$ und die Folgenglieder a_n, b_n beliebig nah zum selben Punkt, nämlich dem Limes $a = b$, für größeren Indizes n, liegen können. Präziser ausgedruckt: Einerseits erhalten wir mit Hilfe der Dreiecks-Ungleichung

$$|a_n - b_n| = |a_n - a + a - b_n| \leq |a_n - a| + |b - b_n|$$

und andererseits sind nach Definition die Abstände $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ beliebig klein. Man beachte, dass aus $c_n \in (a_n, b_n)$ die Ungleichung

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n|$$

folgt. Sei jetzt $N \in \mathbb{N}$, so dass es für alle $n \geq N$ gilt (so ein N haben wir schon öfter ausgesucht!):

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dann gilt $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und damit gilt auch $|a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |a - c_n| &= |a - a_n + a_n - c_n| \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - c_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Theorem 8.2.4. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei (c_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert c, so dass $a \leq c_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq c \leq b$.*

Beweis. Angenommen $c < a$ gilt. Sei $\varepsilon := \frac{|a-c|}{2}$ und sei $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\forall n \geq N : |c_n - c| < \varepsilon$. Betrachten wir jetzt ein beliebiges c_n mit $n > N$. Dann $c_n \in U_\varepsilon(c) = (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ und damit gilt $c_n < a$, was ein Widerspruch ist. Der Fall $b < c$ führt ähnlicherweise zum Widerspruch. Daraus folgt, dass $a \leq c \leq b$ gilt, wie erwünscht. □

8.3. **Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$.**

Definition 8.3.1.

(1) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird bestimmt divergent gegen $+\infty$ genannt, wenn
$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > K$$
gilt. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(2) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird bestimmt divergent gegen $-\infty$ genannt, wenn $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ wird verwendet.

Proposition 8.3.2.

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq N}$ ist eine Nullfolge.

(2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
   (a) Wenn $a_n > 0$ für alle n, dann divergiert $(\frac{1}{a_n})$ bestimmt gegen $+\infty$.
   (b) Wenn $a_n < 0$ für alle n, dann divergiert $(\frac{1}{a_n})$ bestimmt gegen $-\infty$.

Beweis. Wir beweisen nur Teil (1), wenn (a_n) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Der Fall wenn (a_n) bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, wird ähnlich bewiesen. Nach Definition gilt $\exists N : \forall n \geq N : a_n > 1$ und damit gilt $\forall n \geq N : a_n \neq 0$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, existiert $N_1 (> N)$ mit der Eigenschaft $\forall n \geq N_1 : a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit gilt auch $\forall n \geq N_a : \frac{1}{a_n} < \varepsilon$. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Um Teil (2).a zu beweisen, betrachte eine beliebige Konstante $K > 0$. Dann ist $\varepsilon := \frac{1}{K} > 0$ und nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N : a_n < \varepsilon$. Dann gilt $\frac{1}{a_n} > K$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt $\lim(\frac{1}{a_n}) = \infty$. Teil (2).b wird ähnlich bewiesen. □

8.4. **Das Vollständigkeits-Axiom.**

Definition 8.4.1. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine *Cauchy-Folge*, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N_\varepsilon : (|a_n - a_m| < \varepsilon)$$
gilt.

Theorem 8.4.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a und sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition gilt $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : (|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2})$. Betrachte jetzt beliebige $n, m \geq N_\varepsilon$. Dann gilt
$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
□

Notation. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Dann bezeichnet $[a,b]$ die Menge aller reellen Zahlen x mit $a \leq x \leq b$ und $\operatorname{diam}([a,b]) := |b-a|$.

Diskussion 8.4.3.

(1) Sei $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette abgeschlossener endlicher Intervalle in $\mathbb{R}$. Das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren reelle Zahlen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, so dass $I_n = [a_n, b_n]$ und $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das *Intervallschachtelungs-Prinzip* ist die folgende Behauptung: Wenn zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_n) = 0$ gilt, dann gilt $\exists! x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

(2) Das *Vollständigkeits-Axiom* ist die Behauptung, dass jede Cauchy-Folge konvergiert.

Theorem 8.4.4. *Das Vollständigkeits-Axiom ist zum Intervallschachtelungs-Prinzip äquivalent.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $\{I_n\}$ eine beliebige absteigende Kette endlicher abgeschlossener reellen Intervalle mit der Eigenschaft, dass $(\operatorname{diam}(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Seien $a_n \leq b_n$ reelle Zahlen, so dass $I_n = [a_n, b_n]$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir möchten zeigen, dass $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ genau eine reelle Zahl enthält.

Behauptung. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(\operatorname{diam}(I_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N : \operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon$ gilt. Seien $n, m > M$. Dann $a_n \in I_n$, $a_m \in I_m$ und da die Kette $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ absteigend ist, sind I_n und I_m Teilmengen von I_N. Daher $a_n, a_m \in I_N$. Daraus Folgt $|a_n - a_m| \leq \operatorname{diam}(I_N) < \varepsilon$. $\square$

Nach dem Vollständigkeits-Axiom konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Betrachten wir ein beliebiges Element I_k der gegebenen Kette abgeschlossener Intervalle. Für jedes $n \geq k$ gilt $I_n \subseteq I_k$ und damit gilt $a_n \in I_k$, d.h. $a_k \leq a_n \leq b_k$. Nach Theorem 8.2.4 gilt $a_k \leq \lim a_n \leq b_k$ und damit $x \in I_k$. Es folgt $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$, da I_k beliebig war.

Angenommen $\exists y \in \mathbb{R}$, so dass $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ und $y \neq x$ gilt. Sei $\varepsilon = |x-y|$. Nach Voraussetzung ist $(\operatorname{diam}(I_k))$ eine Nullfolge und damit existiert $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$, $\operatorname{diam}(I_k) < \varepsilon$ gilt. Die Zahlen x, y sind aber Elemente von I_k und daher $|x-y| \leq \operatorname{diam}(I_k) < \varepsilon$. Widerspruch!

($\Leftarrow$) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge. Zu beweisen ist, dass (a_n) konvergiert.

Behauptung 8.4.5. Es existiert eine Teilmenge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Indizes, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$, die folgenden zwei Eigenschaften gelten:

$$n_k < n_{k+1} \quad \text{und} \quad \forall n, m \geq n_k : |a_n - a_m| < \frac{1}{2^k}.$$

Beweis. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, es existiert n_0 mit $\forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < 1$. Nehmen wir als nächstes an, dass n_k schon definiert ist. Noch einmal, da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert n'_{k+1}, so dass $\forall m, n \geq n'_{k+1} : |a_n - a_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Man beachte, für jedes $n^* \geq n'_{k+1}$ gilt auch

$$\forall m, n \geq n^* : |a_n - a_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

und damit können wir ein n_{k+1} aussuchen, das größer als n_k ist und $\forall m, n \geq n_{k+1} : |a_n - a_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$ erfüllt. $\square$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ jetzt sei $I_k := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_{n_k}| \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$. Dann gilt $I_k = [a_{n_k} - \frac{1}{2^{k-1}}, a_{n_k} + \frac{1}{2^{k-1}}]$ und damit $\text{diam}(I_k) = 2 \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-2}}$. Dann ist $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie endlicher abgeschlossener Intervalle reeller Zahlen und $\lim_{n\to\infty}(\text{diam}(I_n)) = 0$. Als nächstes beweisen wir, dass diese Familie eine absteigende Kette ist.

Behauptung. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $I_{k+1} \subseteq I_k$.

Beweis. Sei k fixiert und sei $x \in I_{k+1}$ beliebig. Dann gilt $|x - a_{n_{k+1}}| \leq \frac{1}{2^k}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |x - a_{n_k}| &= |x - a_{n_k} + a_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}}| \\ &= |(x - (a_{n_{k+1}}) + (a_{n_k} - a_{n_{k+1}})| \\ &\leq |(x - (a_{n_{k+1}})| + |(a_{n_k} - a_{n_{k+1}})| \\ &< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Das heißt, $x \in I_k$. □

Nach dem Intervallschachtelungs-Prinzip $\exists! x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, betrachten wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Sei $k \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ und sei $n \geq n_k$. Nach der Definition der rekursiv definierten Folge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gilt $|a_n - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$. Es folgt:

$$|x - a_n| = |x - a_n + a_{n_k} - a_{n_k}| \leq |x - a_{n_k}| + |a_n - a_{n_k}| < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k} < 3 \cdot \varepsilon.$$

Das heißt, n_k ist fast was wir wollten, aber leider nur fast! Nichtsdestotrotz ist es nicht schwer ein gut geeignetes N_ε zu finden. Man beachte, dass wenn $k^* \in \mathbb{N}$ groß genug ist, so dass $\frac{1}{2^{k^*}} < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt, dann gilt auch $|x - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_{k^*}$: Nach Behauptung 8.4.5 gilt $|a_n - a_{n_{k^*}}| < \frac{1}{2^{k^*}}$ für $n \geq n_{k^*}$. Außerdem ist $x \in I_{k^*}$ und daher gilt $|x - a_{n_{k^*}}| \leq \frac{1}{2^{k^*-1}}$. Daraus folgt

$$|x - a_n| = |x - a_n + a_{n_{k^*}} - a_{n_{k^*}}| \leq |x - a_{n_{k^*}}| + |a_n - a_{n_{k^*}}| < \frac{1}{2^{k^*-1}} + \frac{1}{2^{k^*}} = \frac{3}{2^{k^*}} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Sei jetzt $N_\varepsilon := n_{k^*}$. Für jedes $n \geq N_\varepsilon$ gilt nach den obigen Überlegungen $|x - a_n| < \varepsilon$. Daraus folgt, wie erwünscht, dass $x = \lim a_n$. □

8.5. **Satz von Bolzano-Weierstraß.**

Definition 8.5.1. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge der ursprünglichen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 8.5.2. Jede Teilfolge einer konvergente Folge ist konvergent mit selbem Grenzwert.

Theorem 8.5.3. *(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (a_n) beschränkt. Dann existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [x, y]$. O.B.d.A. ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich, da wenn dies nicht der Fall ist, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\forall m, n \geq n_0 : a_m = a_n$ existiert. Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist konstant und damit konvergent.

Sei $I_0 = [x, y]$ und sei $n_0 = 0$. Außerdem sei z_0 der Mittelpunkt des Intervalls I_0, d.h. $z_0 := \frac{x+y}{2}$. Seien $I_0^- = I_0 \cap (-\infty, z_0]$ und $I_0^+ = I_0 \cap [z_0, +\infty)$. Äquivalent setze $I_0^- := [x, z_0]$ und $I_0^+ := [z_0, y]$. Man beachte, dass mindestens ein der Intervalle I_0^- und I_0^+ unendlich viele Elemente von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Wir suchen einer der beiden Intervalle aus, das genau diese Eigenschaft hat und bezeichnen dieses Intervall durch I_1. Eine andere Art vorzugehen ist I_1 folgenderweise zu definieren: Sei $I_1 := \begin{cases} I_0^+, \text{falls } I_0^+ \cap \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ unendlich} \\ I_0^-, \text{sonst.} \end{cases}$

Insbesondere gilt $\operatorname{diam}(I_1) = \frac{1}{2}(\operatorname{diam}(I_0))$. Sei $n_1 := \min\{l \in \mathbb{N} \mid l > n_0 \text{ und } a_l \in I_1\}$. Angenommen I_k und n_k sind definiert. Seien z_k die Mitte des Intervalls I_k, $I_k^- := I_k \cap (-\infty, z_k]$ und $I_k^+ = I_k \cap [z_k, +\infty)$. Setze

$$I_{k+1} := \begin{cases} I_k^+, \text{falls } I_k^+ \cap \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ unendlich} \\ I_k^-, \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\operatorname{diam}(I_{k+1}) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(I_k)$. Weiters definiere $n_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N} \mid l > n_k \text{ und } a_l \in I_{k+1}\}$.

Dann ist $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Kette geschlossener endlicher Intervalle und $\operatorname{diam}(I_k) = \frac{1}{2^k}(|x-y|)$ für alle k. Insbesondere gilt $\lim\limits_{k\to\infty}(\operatorname{diam}(I_k)) = 0$.

Behauptung 8.5.4. $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Suchen wir ein $k \in \mathbb{N}$ aus, sodass $\frac{|x-y|}{2^k} < \varepsilon$ gilt. Seien $l, m \geq k$. Dann gelten

$$a_{n_l} \in I_l \subseteq I_k \quad \text{und} \quad a_{n_m} \in I_m \subseteq I_k.$$

Daraus folgt $a_{n_l}, a_{n_m} \in I_k$ und daher gilt $|a_{n_l} - a_{n_m}| \leq \operatorname{diam}(I_k) = \frac{|x-y|}{2^k} < \varepsilon$. Sei jetzt $N_\varepsilon = n_k$. □

Da jede Cauchy-Folge konvergent ist, ist (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge von (a_n). □

Definition 8.5.5. Eine Zahl a heißt *Häufungspunkt* der Folge (a_n), wenn es eine gegen a konvergierende Teilfolge von (a_n) gibt.

Mit dem obigen Begriff können wir den Satz von Bolzano-Weierstraß folgenderweise umformulieren: Jede beschränkte Folge besitzt wenigsten einen Häufungspunkt.

Definition 8.5.6. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt:

(1) monoton wachsend (bzw. monoton fallend) wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$) gilt.
(2) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$ (bzw. $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$) gilt.
(3) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Korollar 8.5.7. Sei (a_n) eine beschränkte monotone Folge reeller Zahlen. Dann konvergiert (a_n).

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\forall l, t \geq k : |a_{n_l} - a_{n_t}| < \varepsilon$. Seien $n, m \geq n_k$. Dann existieren $l, t > k$, so dass

$$n_l \leq n < n_{l+1} \quad \text{und} \quad n_t \leq m < n_{t+1}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n_l} + a_{n_l} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - a_{n_t} + a_{n_t} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - a_{n_t}| + |a_{n_t} - a_m|.\end{aligned}$$

Die Folge ist monoton wachsend und daher gelten

$$a_{n_l} \leq a_n \leq a_{n_{l+1}} \quad \text{und} \quad a_{n_t} \leq a_m \leq a_{n_{t+1}}.$$

Daraus folgt $|a_n - a_{n_l}| \leq |a_{n_l} - a_{n_{l+1}}|$ und $|a_m - a_{n_t}| \leq |a_{n_t} - a_{n_{t+1}}|$ und damit gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_{n_l} - a_{n_{l+1}}| + |a_{n_l} - a_{n_t}| + |a_{n_t} - a_{n_{t+1}}| < 3\varepsilon.$$

Sei jetzt $k^* \in \mathbb{N} : \forall l,t \geq k^* : |a_{n_l} - a_{n_t}| < \frac{\varepsilon}{3}$ und sei $N_\varepsilon := n_{k^*}$. Dann gilt, wie erwünscht

$$\forall n,m \leq N : |a_n - a_l| < \varepsilon.$$

□

Beispiel 8.5.8. (Häufungspunkte)

(1) Sei $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Dann gilt
  - $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{2k}) = 1$, und
  - $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}(-1 + \frac{1}{2k}) = -1$

  Damit sind 1 und -1 Häufungspunkte von (a_n).

(2) Die Folge $a_n := n$, $n \in \mathbb{N}$ ist bestimmt divergent. Damit ist jede Teilfolge von (a_n) unbeschränkt und daher besitzt (a_n) keine konvergente Teilfolgen.

(3) Als nächstes betrachten wir die Folge (a_n), wobei

$$a_n := \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

  Die Folge (a_n) ist unbeschränkt. Es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$ und damit ist 0 Häufungspunkt von (a_n).

(4) Sei (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{t\to\infty} a_n = a$. Dann konvergiert jede Teilfolge von (a_n) to a und damit hat (a_n) einen einzigen Häufungspunkt, nämlich der Punkt a.

8.6. **Reihen.**

Definition 8.6.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Mit der Folge assoziieren wir die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $s_n = \sum_{k=0}^n a_n$.

(1) Die Folge der Partialsummen wird auch (unendliche) Reihe mit Gliedern a_n genannt und mit $\sum_{n=0}^\infty a_n$ bezeichnet.

(2) Wenn die Folge (s_n) konvergiert, wird $\lim s_n$ auch durch $\sum_{k=0}^\infty a_k$ bezeichnet und wird *Summe der Reihe* genannt.

(3) Statt $\mathbb{N}$ kann auch die Indexmenge $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq n_0\}$ verwendet werden, wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixiert ist.

Beispiel 8.6.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$, sei $a_n = \frac{n}{n+1}$. Betrachte die Folge (a_n). Dann gilt:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{k^2-(k^2-1)}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \frac{n}{n+1} - 0 = \frac{n}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\lim \frac{1}{n}} = 1.$$

Theorem 8.6.3. *(Unendliche geometrische Reihe) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Es gilt $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, was man mit Hilfe vollständiger Induktion beweisen kann. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=0}^{n} x^k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} x^n}{1-x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

□

Beispiel 8.6.4. Berechnen Sie die folgenden Summen:

(1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,
(2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Theorem 8.6.5. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus den Rechenregeln konvergenter Folgen. □

8.7. **Konvergenzkriterien für Reihen.**

Theorem 8.7.1. *(Cauchysches Konvergenzkriterium) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert, so dass $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N$ gilt.*

Beweis. Betrachten wir die Folge aller Partialsummen (s_n), wobei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dann gilt $s_n - s_{m-1} = \sum_{n=m}^{n} a_k$. Damit können wir das Kriterium von Cauchy folgenderweise umformulieren: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, genau dann wenn (s_n) eine Cauchy-Folge ist. Das Letztere gilt nach dem Vollständigkeits-Axiom und der Tatsache, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. □

Theorem 8.7.2. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Dann gilt $\lim a_n = 0$. Man beachte, dass dies eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ist.*

Beweis. Nach Theorem 8.7.1 existiert zu vorgegebenem ε ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n,m \geq N_\varepsilon : |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$$

gilt. Insbesondere gilt $\forall n > N_\varepsilon ||a_n| < \varepsilon$. Das heißt, $\lim a_n = 0$. ☐

Beispiel 8.7.3. Die Folge $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ist nicht konvergent, da die obige notwendige Bedingung nicht erfüllt ist. Geben Sie weitere Beispiele von nicht konvergenten Reihen.

Theorem 8.7.4. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit nicht negativen Reihenglieder, d.h. $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann wenn die Folge der Partialsummen (s_n), wobei $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, beschränkt ist.*

Beweis. Man beachte, dass die Folge der Partialsummen monoton wachsend ist. Damit folgt die Behauptung aus der Eigenschaften der monoton wachsenden Folgen. ☐

Beispiel 8.7.5.

(1) Betrachten wir die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} s_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Big(\sum_{n=2^i+1}^{i+1} \frac{1}{n} \Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\Big(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\Big)}_{\geq 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}} \\ &\geq 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Folge der Partialsummen unbeschränkt ist. Das heißt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(2) Sei $k > 1$. Wir werden beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert. Sei n beliebig. Es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n \leq 2^{m+1} - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_n \leq \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^k} &= 1 + \underbrace{\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\Big)}_{\leq 2\cdot\frac{1}{2^k}} + \cdots + \underbrace{\Big(\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^k}\Big)}_{\leq 2^m\cdot\frac{1}{(2^m)^k}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{m} 2^i \frac{1}{(2^i)^k} = \sum_{i=0}^{m} \Big(\frac{1}{2^{k-1}}\Big)^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{k-1}}\Big)^i = \frac{1}{1-2^{-k+1}}. \end{aligned}$$

Das heißt, für jedes n ist $s_n \leq \frac{1}{1-2^{-k+1}}$ und damit ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt.

Theorem 8.7.6. *(Leibnizsches Konvergenzkriterium) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Beweis. Man beachte $s_k := \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$. Es gelten:

(a) $s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$,
(b) $s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$,
(c) $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$.

Daher ist die Folge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge (s_{2k+1}) ist monoton wachsend. Für jedes $k \geq 1$, sei $I_k := [s_{2k+1}, s_{2k}]$. Dann gilt $\operatorname{diam}(I_k) = a_{2k+1}$. Außerdem bilden die Intervalle $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Nach dem Vollständigkeits-Axiom existiert s mit $\{s\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $|s_k - s| \leq |s_k - s_{k+1}| = a_k$. Die Folge (a_k) ist eine Nullfolge. Daraus folgt, dass (s_k) konvergiert, mit Grenzwert s. □

Beispiel 8.7.7.

(1) Nach dem Konvergenzkriterium von Leibniz ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

konvergent. Die Reihe wird *alternierende harmonische Reihe* genannt.

(2) Ähnlich ist zu beweisen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergent ist.

Definition 8.7.8. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert.

Diskussion 8.7.9. Man beachte, dass die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ monoton wachsend ist. Daher ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent genau dann wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Proposition 8.7.10. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium (siehe Theorem 8.7.1) existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n, m \geq N_\varepsilon : \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

gilt. Nach der Dreiecks-Ungleichung gilt: $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$ und damit gilt

$$\forall n, m \geq N_\varepsilon : |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon.$$

Das heißt, die Folge der Partialsummen (s_n) der Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge, und damit ist sie konvergent. □

Theorem 8.7.11. *(Majorantenkriterium) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe, so dass $c_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert jede Folge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit der Eigenschaft, dass $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ absolut. Die Reihe $\sum c_n$ wird eine Majorante von $\sum a_n$ genannt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq m \geq N : |\sum_{k=m}^{n} c_k| < \varepsilon.$$

Daher gilt

$$\forall n \geq m \geq N : \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen von $(|a_n|)$ eine Cauchy-Folge, was die absolut Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ impliziert. □

Beispiel 8.7.12. Betrachten wir nochmals die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, wobei $k \geq 2$ gilt. Man beachte, dass für eine beliebige Folge (c_n) die Formel $c_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k - c_{k-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Jetzt, sei $c_n = \frac{n}{n+1}$, $c_0 = 0$. Dann gilt für $k \geq 1$

$$c_k - c_{k-1} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Daraus folgt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(c_k - c_{k-1}) = \frac{n}{n+1}$ und damit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Insbesondere konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}.$$

Für $k \geq 2$ und alle $n \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$

Daher folgt, dass $\sum \frac{2}{n(n+1)}$ eine Majorante von $\sum \frac{1}{n^k}$ ist und damit konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

Diskussion 8.7.13. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe, wobei $c_n \geq 0$ für alle n. Betrachten wir eine beliebige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, wobei $a_n \geq c_n$. Nehmen wir an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Dann ist die Letztere eine Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und nach Theorem 8.7.11 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, Widerspruch!

Theorem 8.7.14. *(Quotienten-Kriterium) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und sei $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$, so dass*

$$\forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolut.

Beweis. O.B.d.A. gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mittels vollständiger Induktion kann man beweisen, dass

$$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq \theta^n |a_0|.$$

Es folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\theta^n$ eine Majorante von $\sum a_n$ ist. Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_0|\theta^n = \frac{|a_0|}{1-\theta}$ und daher konvergiert nach Theorem 8.7.11 auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. $\square$

Beispiel 8.7.15. Als nächstes beweisen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Sei $a_n := \frac{n^2}{2^n}$ für $n \geq 3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1.\end{aligned}$$

Das heißt, die Quotienten-Kriterium ist für $\theta = \frac{8}{9}$ erfüllt.

Diskussion 8.7.16. Man beachte, dass die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \geq n_0$ nicht ausreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ ist. Tatsächlich ist die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent und es gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \geq 1$. Andererseits gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ und damit gibt es keine bestimmte Zahl $\theta < 1$ mit der Eigenschaft, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

Ein wichtiges Beispiel ist die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Man beachte, dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Es gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ und damit gibt es kein $\theta < 1$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \leq \theta$$

für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist das Quotienten-Kriterium *eine hinreichende, jedoch nicht notwendige Bedingung* für die Konvergenz einer Reihe.

Diskussion 8.7.17. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann definiert τ eine Umordnung der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = a_{\tau(0)} + a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \cdots$$

Theorem 8.7.18. *(Umordnungssatz) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Beweis. Sei $A=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und sei $\varepsilon>0$ beliebig. Da $\lim\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|\right)=r$, wobei $r\in\mathbb{R}$, existiert $N\in\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall n\geq N: \sum_{k=n}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt

$$|A-\sum_{k=0}^{N-1}a_k|=|\sum_{k=N}^{\infty}a_k|\leq\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Behauptung. Es existiert $M_\varepsilon\in\mathbb{N}$, so dass $\{j\}_{j=0}^{N-1}\subseteq\{\tau(j)\}_{j=0}^{M_\varepsilon}$.

Beweis. Für jedes $j=0,\cdots,N-1$ sei $a_j:=\tau^{-1}(j)$. Sei $M_\varepsilon\in\mathbb{N}$, so dass $M_\varepsilon>\max\{a_j\}_{j=0}^{N-1}$. Dann $\{\tau(a_j)\}_{j=0}^{N-1}\subseteq\{\tau(j)\}_{j=0}^{M_\varepsilon}$. Das heißt, $\{j\}_{j=0}^{N-1}\subseteq\{\tau(j)\}_{j=0}^{M_\varepsilon}$. □

Für alle $m\geq M_\varepsilon$ gilt:

$$|\sum_{k=0}^{m}a_{\tau(k)}-A|\leq\underbrace{|\sum_{k=0}^{m}a_{\tau(k)}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k|}_{\leq\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|\sum_{k=0}^{N-1}a_k-A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{\tau(n)}=A.$$

□

Beispiel 8.7.19. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ konvergiert nach dem Kriterium von Leibniz. Es gibt jedoch eine Umordnung der Reihe τ, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\tau(n)-1}}{\tau(n)}=\infty.$$

Sei $n\geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^n+(2^n-1)}&=\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\\&>\frac{2^n}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\\&=2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left((\frac{1}{5}+\frac{1}{7})-\frac{1}{6}\right)+\cdots\\&\qquad+\left(\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)-\frac{1}{2n+2}\right)+\cdots\end{aligned}$$

Sei
$$c_n := \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) - \frac{1}{2n+2}.$$
Man beachte, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe ist. Andererseits ist (c_n) keine Nullfolge und damit konvergiert nach Theorem 8.7.2 die Reihe $\sum c_n$ nicht.

LITERATUR

[1] H. Enderton *A mathematical introduction to logic* Harcourt/Academic Press, second edition.

[2] O. Forster *Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen* 12. Auflage, Springer, 2015.

[3] M. Goldstern, H. Judah *The incompleteness phenomenon* A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 1995.

[4] W. Just, M. Weese *Discovering Modern Set Theory*, Graduate Studeis in Mathematics, Volume 8, American Mathematical Society, 1995.

[5] K. Kunen *The Foundations of Mathematics* Studies in Logic, College Publications, Volume 19, 2009.

[6] H. Schichl, R. Steinbauer *Einführung in das mathematische Arbeiten* 3. Auflage, Springer, 2018.

[7] M. Ziegler *Mathematische Logik* Mathematik Kompakt, Birkhäuser, 2010.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF VIENNA, KOLINGASSE 14-16, 1090 WIEN, AUSTRIA

Email address: vera.fischer@univie.ac.at