Axiom of Choice

Arved Bartuska
Betreuerin: Dr. Vera Fischer

26. August 2016, Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Georg Cantor war einer der ersten, die sich in einem heutigen Sinn mit dem Unendlichen in der Mathematik beschäftigten. Er bewies als erster, dass die Anzahl der reellen Zahlen eine andere Art der Unendlichkeit darstellt als die Anzahl der natürlichen Zahlen, dass diese nicht in eine Eins-zu-Eins-Beziehung mit jenen gestellt werden können. Nicht beweisen konnte er hingegen seine berühmt gewordene Kontinuumshypothese, dass nämlich keine Unendlichkeit echt zwischen diesen beiden liegen könne, die Mächtigkeit jeder Menge, die größer als die der natürlichen Zahlen ist, also mindestens so groß wie die der reellen Zahlen sein muss.

Die Beschäftigung mit diesen Beziehungen zwischen Mengen sowie eine generelle Tendenz zu mehr struktureller Klarheit in der Mathematik, führte zum Aufkommen der axiomatischen Mengenlehre und mit ihr auch einem Beweis des mit der Kontinuumshypothese in Verbindung stehenden Satzes, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann von Ernst Zermelo [Zer04, S. 514-516]. Er berief sich bei diesem nicht wie frühere Mathematiker auf augenscheinlich wahre Prinzipien, sondern auf ein klar gegliedertes Axiomensystem. Diese veränderte Herangehensweise führte allerdings nicht einfach dazu, dass der Beweis plausibler erschien als frühere, sondern dass stattdessen das Axiomensystem in Frage gestellt werden konnte, insbesondere das von Zermelo eigens für diesen Beweis formulierte Auswahlaxiom. Es steht außer Frage, dass die Wohlordenbarkeit jeder Menge aus dem Auswahlaxiom und den anderen neun Axiomen der sogenannten Zermelo-Mengenlehre folgt, unklar ist jedoch ob es zulässig ist, dieses Axiom ins Fundament der Mathematik aufzunehmen. Besonders Abraham Fraenkel beschäftigte sich mit dieser Problematik, und so wird das Gerüst, auf dem heute im allgemeinen Mathematik betrieben wird, als Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom, kurz **ZFC**, bezeichnet [Fra22, S. 230-237].

Was die Argumente der bis heute geführten Debatte für und wider die Sinnhaftigkeit der Inklusion des Auswahlaxioms in die übrigen Axiome sind, werde ich in dieser Arbeit erörtern. Zunächst werde ich die Grundgedanken hinter dem Axiomensystem ZFC kurz darstellen, um anschließend einige verschiedene Versionen des Auswahlaxioms, deren jeweilige Äquivalenz und deren besondere Verwendung in unterschiedlichen Gebieten der Mathematik zu präsentieren. Mit diesen ausgerüstet werde ich als nächstes einige wichtige Resultate zeigen, die ohne das Auswahlaxiom scheitern und so dessen Wichtigkeit und Nützlichkeit unterstreichen, um anschließend an einem in gewisser Weise verblüffenden Resultat zu demonstrieren, was gegen das Auswahlaxiom und seine Folgen einzuwenden ist. Abschließend werde ich versuchen, einen möglichen Ausweg aus diesem Dilemma zu präsentieren oder zumindest aufzuzeigen, in welche Richtung sich die Debatte seit der erstmaligen Formulierung des Auswahlaxioms entwickelt hat und noch entwickeln kann.

2 Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Die Axiome der Mathematik stellen das Grundgerüst dar, auf dem das riesige Gebäude der heutigen Mathematik aufgestellt ist. Anders als bei einem tatsächlichen Grundgerüst wurde aber weder ursprünglich die Mathematik so begonnen, dass die Axiome formuliert wurden, noch lehrt man Mathematik, indem man bei diesen beginnt. Im Gegenteil, man begegnet den Axiomen der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre erst in einem sehr späten Stadium der Beschäftigung mit der Mathematik als Wissenschaft, da zum Verständnis der Aussagen der einzelnen Axiome sowie deren Sinnhaftigkeit einiges an Abstraktionsleistung sowie Kenntnis mathematischer bzw. logischer Symbole notwendig ist.

Mathematikunterricht in der Volksschule beginnt deshalb mit mathematischen Resultaten, die auf einer Art natürlicher Anschauung beruhen. Bis zum Aufkommen der modernen Mengenlehre wurde auch an der Spitze der Wissenschaft anhand von Sätzen argumentiert, die „augenscheinlich wahr“ sind und nicht hinterfragt zu werden brauchen, aber auch nicht hinterfragt werden können. Erst mit der präzisen Formulierung der Axiome wurde man sich bewusst, dass alle bisherigen Resultate der Mathematik, so wahr, ewig und unumstößlich sie auch wirken mögen, nur ausgehend von diesen Axiomen gelten können. Daraus ergibt sich selbstverständlich die überaus spannende Frage, ob diese Axiome denn zutreffen. Diese ist allerdings im wesentlichen eine philosophische und keine mathematische Frage und lässt sich daher nicht klar beantworten. Es steht jedoch fest, dass die Mathematik, so wie man sie bisher kannte, gilt, solange man die Axiome akzeptiert.
Ich werde diese Axiome nun auflisten und kommentieren, um anschließend für das letzte von ihnen, das Auswahlaxiom, der Frage nachzugehen, ob es Sinn macht, nützlich ist, oder gar zu Widersprüchen führt, wenn man es annimmt.

Ich halte mich in der Formulierung und Anordnung der Axiome an Kenneth Kunen: The Foundations of Mathematics [Kun2007].

Axiom 0. Existenz.

$$\exists x(x = x)$$

Sowohl Aussage als auch Nutzen dieses Axioms sollten offensichtlich sein, es gibt überhaupt eine Menge.

Axiom 1. Extensionalität.

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \quad \rightarrow \quad x = y$$

Dieses Axiom besagt, dass zwei Mengen, die die selben Elemente enthalten, gleich sind.

Axiom 2. Fundierung.

$$\exists y(y \in x) \quad \rightarrow \quad \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))$$

Wenn die Menge x nicht leer ist, dann enthält sie zumindest ein Element y, welches keine mit ihr gemeinsamen Elemente enthält, x und y sind also disjunkt. Dadurch wird verhindert, dass eine Menge konstruiert werden kann, die sich selbst enthält.

Axiom 3. Aussonderung.

$$\exists y \forall x (x \in y \quad \leftrightarrow \quad x \in z \wedge \varphi(x))$$

Bei diesem handelt es sich eigentlich um eine ganze Menge an Axiomen, nämlich gilt, dass jede Menge y eine Teilmenge x enthält, für deren Elemente φ gilt.

Axiom 4. Paarmengen.

$$\exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

Für zwei Mengen x und y gibt es eine Menge z, die diese als Elemente enthält.

Axiom 5. Vereinigungen.

$$\exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \quad \rightarrow \quad x \in A)$$

Es gibt eine Vereinigung, die alle Elemente der Elemente der vereinigten Menge enthält.

Axiom 6. Ersetzung.

$$\forall x \in A \exists ! y \varphi(x, y) \quad \rightarrow \quad \exists B \forall x \in A \exists y \in B \varphi(x, y)$$

Auch hierbei handelt es sich um ein Axiomenschema, welches bei eindeutiger Beziehung zweier Elemente via φ die Ersetzung dieser Elemente ermöglicht.

Axiom 7. Unendlichkeit.

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x))$$

Dieses Axiom besagt, dass es eine Menge gibt, die sowohl die leere Menge als auch den Nachfolger jedes ihrer Elemente enthält, definiert als $S(y) := y \cup \{y\}$.

Axiom 8. Potenzmenge.

$$\exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

Dieses Axiom definiert die Potenzmenge $y := \mathcal{P}(x)$.

Axiom 9. Auswahl.

$$\emptyset \notin F \wedge \forall x \in F \forall y \in F (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \quad \rightarrow \quad \exists C \forall x \in F (\mathrm{SING}(C \cap x))$$

Das Auswahlaxiom schließlich besagt, dass für jede nichtleere und disjunkte Menge F eine Menge C existiert, so dass der Durchschnitt von C mit jedem Element von F genau ein Element enthält.

3 Unterschiedliche Versionen des Auswahlaxioms

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, gibt es verschiedene Versionen des Auswahlaxioms. Bei diesen handelt es sich aber nicht bloß um geringfügige Unterschiede in der Formulierung, sondern um unabhängig voneinander entdeckte Aussagen, die in diversen Gebieten der Mathematik zur Anwendung kommen und späterhin als logisch zum Auswahlaxiom äquivalent erkannt wurden. In der Präsentation dieser Resultate halte ich mich ebenfalls an Kunen [Kun2007, S. 56-59].

Definition I.1. (Auswahlfunktion)
Eine Auswahlfunktion g einer Menge A erfüllt einen ähnlichen Zweck wie die Auswahlmenge des Auswahlaxioms, sie weist jeder Teilmenge von A ein Element dieser Teilmenge zu: $g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A,\ g(x) \in x \quad \forall x \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Aus der leeren Menge kann selbstverständlich kein Element ausgewählt werden.

Definition I.2. (Wohlgeordnete Menge)
Eine wohlgeordnete Menge ist eine Menge mit totaler Ordnung, bei der zusätzlich jede Teilmenge, die nicht leer ist, ein kleinstes Element enthält.

Definition I.3. (Endlicher Charakter)
Sei A eine Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$. $\mathcal{F}$ wird von endlichem Charakter genannt, wenn für alle $X \subseteq A : X \in \mathcal{F} \leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von X Element von $\mathcal{F}$ ist.

Definition I.4. (Das Lemma von Teichmüller-Tukey)
Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ von endlichem Charakter und $X \in \mathcal{F}$, dann gibt es ein maximales $Y \in \mathcal{F}$, (d.h. $\nexists Z : Y \subsetneqq Z, Z \subseteq \mathcal{F}$), s.d. $X \subseteq Y$.

Definition I.5. (Hausdorffs Maximalkettensatz)
Sei $\{P, <\}$ eine streng halbgeordnete Menge. Dann gibt es eine maximale Kette $C \subseteq P$.

Definition I.6. (Lemma von Zorn)
Sei $\{P, <\}$ eine streng halbgeordnete Menge. Wenn es für jede Kette $C \subseteq A$ ein $b \in A$ gibt, s.d. $x \leq b \quad \forall x \in C$, dann gibt es für alle $a \in A$ ein $b \in A$ maximal, s.d. $a \leq b$.

Satz I.7. Es sind äquivalent:

1. Das Auswahlaxiom
2. Jede Menge hat eine Auswahlfunktion
3. Jede Menge kann wohlgeordnet werden
4. Das Lemma von Teichmüller-Tukey
5. Hausdorffs Maximalkettensatz
6. Das Lemma von Zorn

Beweis von Satz I.7.
(1) $\to$ (2): Sei A eine Menge. Um eine Auswahlmenge zu erhalten, benötigen wir disjunkte Teilmengen, die durch die Bildung des Kartesischen Produktes der Teilmengen von A mit deren Elementen erzeugt werden. Sei also $F = \{\{x\} \times x : x \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$. Dabei bezeichnet $\{x\} \times x$ die Menge: $\{(x, i) : i \in x\}$. Diese sind für unterschiedliche x offensichtlich disjunkt, die Auswahlmenge C auf F kann also als Auswahlfunktion auf A interpretiert werden, die jeder Teilmenge $x \subseteq A$ ein $i \in x$ zuordnet.

(2) $\to$ (1): Sei F eine disjunkte Menge nichtleerer Mengen. Auf $A := \bigcup F$ erhalten wir eine Auswahlfunktion g, anhand derer sich leicht eine Auswahlmenge $C := \{g(x) : x \in F\}$ definieren lässt.

(2) $\to$ (3): Sei g eine Auswahlfunktion auf A. Um A wohlordnen zu können, müssen wir so lange aus A Elemente auswählen, bis keine mehr übrig sind. Zu diesem Zweck definieren wir κ als die wohlgeordnete Menge kleinster Mächtigkeit, sodass sie nicht injektiv auf A abgebildet werden kann. Als nächstes definieren wir eine Funktion f, die κ auf A oder ein zusätzliches Element S für Stopp abbildet, sollte A fertig geordnet sein: f: $\kappa \to A \cup \{S\}, f(\alpha) = g(A \setminus \{f(\xi) : \xi < \alpha\})$ wenn $A \setminus \{f(\xi) : \xi < \alpha\} \neq \emptyset$, ansonsten $f(\alpha) = S$. f lässt also g nach und nach Elemente von A auswählen, die noch nicht gewählt wurden. Da κ nicht injektiv auf A abgebildet werden kann, muss irgendwann $f(\alpha) = S$ gelten. f eingeschränkt auf das kleinste solche α ergibt eine Bijektion auf A, also kann A wohlgeordnet werden.

(3) $\to$ (2): Wenn A wohlgeordnet ist, so können wir $g(x)$ einfach das kleinste Element von x zuweisen lassen, um eine geeignete Auswahlfunktion zu erhalten.

(3) $\to$ (4): Sei A eine Menge. Da A wohlordenbar ist, kann man es auf folgende Weise aufschreiben: $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$, wobei κ eine wohlgeordnete Menge mit gleicher Mächtigkeit wie A sei. Als nächstes versuchen wir eine Menge Y zu definieren, die in $\mathcal{F}$ liegt, X enthält und maximal ist. Dies machen wir am besten rekursiv und beginnen mit $Y_\beta \subseteq \{x_\xi : \xi < \beta\}$ für $\beta \leq \kappa$, folgendermaßen:
(i) $Y_0 = X$. X ist also auf jeden Fall in A.
(ii) Wenn $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathcal{F} \to Y_{\alpha+1} = Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$, andernfalls $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha$. Bis hierhin sind alle Y_β in $\mathcal{F}$, da X laut Voraussetzung in $\mathcal{F}$ ist und wenn Y_α in $\mathcal{F}$ ist, dann auch $Y_{\alpha+1}$, da entweder $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ in $\mathcal{F}$ ist oder ansonsten $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha$, was bereits in $\mathcal{F}$ ist. Für den Fall, dass β mindestens so große Kardinalität wie $\mathbb{N}$ hat, benötigt man zusätzlich noch:
(iii) $Y_\gamma = \bigcup\{Y_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Diese liegen ebenfalls in $\mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ endlichen Charakter hat und jede endliche Teilmenge von Y_γ in $\mathcal{F}$ liegt, was ja für Y_α bereits gezeigt wurde. Y_κ liegt also in $\mathcal{F}$.

Als nächstes zeigen wir, dass es auch maximal ist. Sei $x_\alpha \notin Y_\kappa$. Dann kann x_α aber auch nicht in $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$ sein, also $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha$, nach (ii) also $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\} \notin \mathcal{F}$. Wäre $Y_\kappa \cup \{x_\alpha\} \in \mathcal{F}$, (wobei offensichtlich $Y_\kappa \cup \{x_\alpha\} \supseteq Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$), so wäre jede endliche Teilmenge von $Y_\kappa \cup \{x_\alpha\}$ in $\mathcal{F}$, also auch jede endliche Teilmenge von $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\}$, also $Y_\alpha \cup \{x_\alpha\} \in \mathcal{F}$, Wid.

(4) $\rightarrow$ (1): Um eine Auswahlmenge zu erzeugen, benötigen wir zunächst eine Mengenfamilie F, die die Voraussetzungen für (1) erfüllt, also disjunkt und nichtleer ist. Um (4) anwenden zu können, benötigen wir außerdem $A = \bigcup F$, genauer gesagt $\mathcal{P}(A)$. Als nächsten Schritt wollen wir eine Menge von teilweisen Auswahlmengen definieren, welche endlichen Charakter hat, um mittels (4) ein maximales Element zu erhalten. Bei diesem handelt es sich dann um die gesuchte Auswahlmenge. Sei $\mathcal{G}$ die Menge der teilweisen Auswahlmengen, $X \in \mathcal{G} \leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ und $X \cap z$ entweder ein einzelnes Element oder leer $\forall z \in \mathcal{F}$. Wenn X in $\mathcal{G}$ ist, so offensichtlich auch jede endliche Teilmenge von X, wenn X nicht in $\mathcal{G}$ ist, schneidet sich also schon eine zweielementige, also insbesondere endliche Teilmenge mit einem Element von F, sodass diese zwei Elemente übrigbleiben, diese ist also auch nicht in $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ist von endlichem Charakter. $\mathcal{G} \neq \emptyset$, da $\emptyset \in \mathcal{G}$. (4) liefert also ein maximales C, welches die Anforderungen einer Auswahlmenge erfüllt: Ang. $\exists z \in F$, s.d. $C \cap z = \emptyset$, dann wähle $p \in z \rightarrow C \subsetneqq C \cup \{p\} \in \mathcal{G}$, Wid.

(4) $\rightarrow$ (5): Hier brauchen wir lediglich zu zeigen, dass die Familie aller Ketten von endlichem Charakter ist. Da jedes Element einer Kette mit jedem anderen vergleichbar ist, gilt dies offensichtlich auch für jede endliche Teilmenge dieser Kette. Sind umgekehrt mindestens zwei Elemente nicht miteinander vergleichbar, so auch nicht in der endlichen Teilmenge nur dieser zwei Elemente. (4) liefert also die gesuchte maximale Kette.

(5) $\rightarrow$ (6): Seien $C \subseteq A, \quad b \in A$ wie in Definition I.2. und $a \in A$. Dann liefert (5) eine maximale Kette, die a enthält, also $a \leq b$.

(6) $\rightarrow$ (4): Für diesen Schritt benötigen wir erstens eine partielle Ordnung von $\mathcal{F}$ und zweitens einen geeigneten Kandidaten für b, der die Bedingung von (6) erfüllt. Als Ordnung bietet sich $\subsetneqq$ an. Dass es sich dabei tatsächlich um eine strenge partielle Ordnung handelt, ist trivial. Um ein geeignetes b zu erhalten, müssen wir etwas mehr arbeiten. Setzen wir $b := \bigcup C$, so können wir zeigen, dass $b \in \mathcal{F}$ und $a \subsetneqq b \quad \forall a \in C$. Da $\mathcal{F}$ endlichen Charakter hat, reicht es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von b in $\mathcal{F}$ ist. Sei $\{d\} \subseteq b$, also $d \in b \rightarrow \exists x \in C : \{d\} \subseteq x$. x ist Element von $\mathcal{F}$ und nach einem analogen Argument aus dem Schritt (3) $\rightarrow$ (4) auch jede Teilmenge von x, also $\{d\} \in \mathcal{F}$. Sei jetzt $\{d_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $\{d_i\}_{i=1}^{n+1} := \{d_i\}_{i=1}^n \cup \{d_{n+1}\}$, dann gibt es ein $x_0 \in C$, s.d. $\{d_{n+1}\} \in x_0$ und laut Induktionsvoraussetzung ein $x \in C$, s.d. $\{d_i\}_{i=1}^n \in x$. Da C total geordnet ist, ist entweder $x_0 \subsetneqq x$ oder $x \subsetneqq x_0$, jedenfalls aber $\{d_i\}_{i=1}^{n+1} \subsetneqq x_0$ oder $\{d_i\}_{i=1}^{n+1} \subsetneqq x \rightarrow$ alle endlichen Teilmengen sind Element von $\mathcal{F} \rightarrow b \in \mathcal{F}$. Somit können wir (6) anwenden und erhalten (1). □

Die sehr unterschiedlichen mathematischen Konstruktionen (Ordnung, Kette, etc.), die in diesen Aussagen vorkommen, erlauben es, Resultate in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik zu beweisen. Darunter befinden sich teilweise sehr zentrale Sätze, die ohne das Auswahlaxiom nicht möglich wären. Es zeigt sich also bereits hier, dass das Auswahlaxiom keineswegs eine Randnotiz ist, sondern im Gegenteil die Frage nach der Rechtfertigung seines Platzes in der Mathematik von zentraler Bedeutung. Einige von diesen Resultaten werde ich im nächsten Abschnitt vorstellen.

4 Unerwünschte Ergebnisse ohne das Auswahlaxiom

Eines der bekanntesten Vorkommnisse des Auswahlaxioms in der herkömmlichen Mathematik ist der Beweis, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Dieser Beweis wird üblicherweise mittels des Lemmas von Zorn geführt und ist für die lineare Algebra von zentraler Bedeutung, aber ansonsten für uns nicht weiter interessant, weswegen wir ihn auslassen werden. Skeptiker des Auswahlaxioms, die aber nicht auf dieses wichtige Resultat verzichten wollen, könnten sich die Frage stellen, ob es nicht möglich sei, den Satz, dass jeder Vektorraum eine Basis hat, auch ohne das Auswahlaxiom, also in **ZF** alleine zu beweisen. Diese Skeptiker muss man leider enttäuschen, da sich zeigen lässt, dass obiges Resultat das Auswahlaxiom impliziert, also ebenfalls mit jenem äquivalent ist. Wir erhalten also angelehnt an [Her2006, S. 67]:

Satz II.1. Es sind äquivalent:

1. Das Auswahlaxiom
2. Jeder Vektorraum hat eine Basis

Definition II.2. (Axiom of Multiple Choice)
Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nichtleeren Mengen gibt es eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von nichtleeren, endlichen Mengen $(F_i)_{i\in I}$, wobei $F_i \subseteq X_i \quad \forall i \in I$.

Satz II.3. Es sind äquivalent:

1. Das Auswahlaxiom
2. Das Axiom of Multiple Choice

Beweis von Satz Satz II.3.
(1) $\rightarrow$ (2) ist trivial, da jede einelementige Menge insbesondere endlich ist.

(2) $\rightarrow$ (1) hingegen kann über Ketten und die Ordenbarkeit der Potenzmenge geführt werden, würde aber über den Umfang dieser Arbeit hinausgehen.

Beweis von Satz II.1.
(2) $\rightarrow$ (1): In diesem recht abstrakten Beweis gehen wir so vor, zunächst aus einer Mengenfamilie $(X_i)_{i\in I}$ einen Vektorraum rationaler Funktionen zu konstruieren, der laut Voraussetzung eine Basis hat und dessen Basiselemente endliche Summen rationaler Funktionen sind. Diese sind so gekürzt, dass sie im Nenner eine endliche Menge an Elementen aus Mengen unserer Familie enthalten. Sei also $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer, paarweise disjunkter Mengen und $X := \bigcup_{i\in I} X_i$. Sei $k(X)$ der Körper rationaler Funktionen mit Elementen $x \in X$ über k, wobei k ein beliebiger Körper ist.

Um sicherzugehen, dass jedes der gewünschten Basiselemente tatsächlich im Nenner Elemente hat, die im Zähler nicht vorkommen, benötigen wir den Grad der Polynome $\alpha \in k(X)$. Sei dazu für jedes Monom p von der Form $p = \beta \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ und jedes $i \in I$

der i-Grad von p definiert als $d_i(p) := \sum_{x_k \in X_i} n_k$. Weiters heiße $\alpha := \frac{p_1 + \cdots + p_n}{q_1 + \cdots + q_m}$ i-homogen, wenn alle p_k vom selben i-Grad d_1 und alle q_k vom selben i-Grad d_2 sind. Schließlich heißt α vom Grad $d := d_1 - d_2$. Dann ist $K := \{a \in k(X) \mid a$ ist i-homogen vom Grad $0 \quad \forall i \in I\}$ der Teilkörper der Polynome mit Zähler und Nenner von selbem Grad. Einfache Rechnung zeigt, dass dieser unter Summen- und Produktbildung abgeschlossen ist und die übrigen Eigenschaften werden trivialerweise übernommen. Damit kann $k(X)$ als der kanonische Vektorraum über K betrachtet werden. Dieser hat nach (1) eine Basis $\mathcal{B}$. Die Monome $x \in X$ können also eindeutig in der Form $x = \sum_{b \in \mathcal{B}(x)} a_b(x) \cdot b$, wobei $\mathcal{B}(x)$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{B}$ und $a_b(x) \neq 0$ ist, dargestellt werden. Seien x und y Elemente desselben X_i. Dann folgt aus:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}(y)} a_b(y) \cdot b = y = \frac{y}{x} \cdot x = \sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \frac{y}{x} \cdot a_b(x) \cdot b \tag{1}$$

und $\frac{y}{x} \in K$, dass $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(y)$ und $\frac{a_b(x)}{x} = \frac{a_b(y)}{y} \quad \forall b \in \mathcal{B}$. Sowohl die Mengen $\mathcal{B}(x)$, als auch die $a_b(x)$ hängen also nur von i, nicht aber von $x \in X_i$ ab. Da die $a_b(x) \in K$ und somit vom i-Grad 0 sind, ist der i-Grad der $\frac{a_b(x)}{x}$ gleich -1, sie enthalten also in gekürzter Form im Nenner zumindest ein $x \in X_i$. Die Menge F_i dieser $x \in X_i$ für ein $b \in \mathcal{B}(y)$ ist eine nichtleere, endliche Teilmenge von X_i. Daraus folgt das Axiom of Multiple Choice und damit (1).

(1) $\rightarrow$ (2) Wird als bekannt vorausgesetzt. □

Nimmt man das Auswahlaxiom nicht an, so ließe sich also ein Vektorraum konstruieren, der keine Basis hätte, durchaus ein weitreichendes und interessantes, um nicht zu sagen, beängstigendes Ergebnis. Nicht nur in der Algebra kommen wir aber ohne das Auswahlaxiom recht schnell in gröbere Schwierigkeiten mit den uns bis jetzt so vertrauten Grundlagen der Mathematik, auch wenn hier möglicherweise nicht auf den ersten Blick ersichtlich ist, an welcher Stelle das Auswahlaxiom benötigt wird. So kann beispielsweise einer der Schlüsselbegriffe der Analysis, die Stetigkeit einer Funktion, auf unterschiedliche Weise definiert werden. Üblicherweise sind diese Definitionen äquivalent und man kann die jeweils praktischste benützen. Ohne das Auswahlaxiom jedoch kann es vorkommen, dass sich diese Arten der Stetigkeit voneinander unterscheiden, wodurch sich die Frage nach Bedeutung des Begriffes der Stetigkeit stellt, da man vor die Aufgabe gestellt ist, sich für einen von beiden zu entscheiden [Her2006, S. 73].

Definition II.4. (Stetigkeit)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt a, wenn: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall y \in \mathbb{R}, |y - a| < \delta \rightarrow |f(y) - f(a)| < \varepsilon$

Definition II.5. (Folgenstetigkeit)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist folgenstetig im Punkt a, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, für die $(a_n) \rightarrow a$ gilt, auch $f(a_n) \rightarrow f(a)$ gilt.

Bemerkung
Eine Funktion ist stetig auf $\mathbb{R}$, wenn sie stetig in jedem $a \in \mathbb{R}$ ist.

Satz II.6.

Ohne das Auswahlaxiom gibt es eine Funktion f, die folgenstetig im Punkt a ist, aber nicht stetig im Punkt a:

Beweis von Satz II.6.
Dieser Beweis benötigt etwas an technischem Apparat, ist aber ansonsten recht anschaulich. Für die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ohne das Auswahlaxiom, also **ZF**, gibt es, wie Paul Cohen gezeigt hat, ein Modell, in dem eine Menge existiert, die unendliche Mächtigkeit hat, aber keine echte Teilmenge von gleicher Mächtigkeit besitzt. Solche Mengen nennt man Dedekind-endlich. Sei D eine solche unendliche Dedekind-endliche Menge. Sei (a_n) eine Folge in D und $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Elemente von (a_n). Diese Menge ist endlich, da sie ansonsten eine unendliche Teilmenge von D wäre, also ist jede Cauchyfolge (a_n) schließlich konstant. D sei O.B.d.A beschränkt, hat also einen Häufungspunkt a. Betrachte als nächstes $S := D \setminus \{a\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Sei beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dann gibt es für $\delta > 0 \quad d \in S : |d - a| < \delta$ aber $|f(d) - f(a)| = 1 > \frac{1}{2}$, also f nicht stetig im Punkt a.

Konvergiert die Folge (a_n) aber gegen a, so ist sie insbesondere Cauchy und deswegen schließlich konstant a, also $f(a_n) = f(a) = 0$ für fast alle n also ist f folgenstetig im Punkt a. □

Korollar II.7.
Ohne das Auswahlaxiom gibt es eine Funktion f, die folgenstetig ist, aber nicht stetig.

Beweis von Korollar II.7.
Betrachte die Folge f aus dem vorigen Beweis eingeschränkt auf die Menge D. □

Als Abschluss dieses Kapitels folgt noch ein Resultat, das meines Erachtens nach deswegen interessant ist weil es im Gegensatz zu den übrigen besprochenen Sätzen tatsächlich die Negation des Auswahlaxioms an einer zentralen Stelle des Beweises einsetzt. Dieses kommt aus dem Gebiet der Graphentheorie und benötigt also eine kurze Erläuterung der vorkommenden Begriffe [Her2006, S. 109f.]:

Definition II.8. (Graph)
Ein Graph $G = (X, R)$ besteht aus Ecken und Kanten, wobei die Ecken durch eine Menge X und die diese Ecken verbindenden Kanten durch eine Relation R auf dieser Menge repräsentiert werden. Die Relation ist zweistellig und symmetrisch.

Definition II.9. (Teilgraph)
Ein Graph $H = (Y, S)$ wird Teilgraph von (X, R) genannt, wenn $Y \subseteq X$ und $S = R|_{Y \times Y}$. Dieser besteht also aus einigen Knoten des ursprünglichen Graphen zusammen mit allen diese verbindenden Kanten.

Definition II.10. (Vollständiger Graph)
Ein Graph G wird vollständig genannt, wenn jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist, also $R = \{(x, y) \in X \times X | x \neq y\}$.

Definition II.11. (Färbung eines Graphen)
Weist man jedem Knoten eines Graphen eine Farbe zu, so dass keine zwei benachbarten, also miteinander verbundenen Knoten die selbe Farbe erhalten, so nennt man den Graphen gefärbt. Da Farbe kein mathematischer Begriff ist und es uns nur auf die Unterscheidbarkeit der einzelnen Farben ankommt, werden diese durch natürliche Zahlen repräsentiert.

Definition II.12. (n-Färbung eines Graphen)
Als n-Färbung eines Graphen G wird ein Homomorphismus $f : G \to \mathbf{n}$ bezeichnet, wobei $\mathbf{n}$ den vollständigen Graphen mit Knotenmenge $\{0, 1, ..., n-1\}$ bezeichnet und ein Homomorphismus f zwischen Graphen folgende Eigenschaft erfüllt: $xRy \to f(x)Sf(y)$. Ein Graph G wird n-färbbar genannt, wenn es eine n-Färbung von G gibt, also jedem Knoten eine von n natürlichen Zahlen zugewiesen werden kann, so dass keine benachbarten Knoten dieselbe Zahl erhalten.

Bemerkung II.13.
Bei Graphenfärbungsproblemen betrachtet man nur Graphen ohne Schleifen, deren Relation R also antireflexiv ist.

Satz II.14. Aus dem Auswahlaxiom folgt die Äquivalenz:

(1) G ist n-färbbar.
(2) Jeder endliche Teilgraph von G ist n-färbbar.

Der Beweis des Satzes ist für diese Arbeit zu umfangreich, für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ siehe [Her2006, S. 111-113].

Satz II.15.

Ohne das Auswahlaxiom gibt es einen Graph G, so dass jeder endliche Teilgraph von G 2-färbbar ist, G aber nicht 2-färbbar ist.

Beweis von Satz II.15.
Der zu diesem Zweck konstruierte Graph hat eine auf der einen Seite recht einfache, andererseits allerdings auch ausgefallene Struktur. Er besteht nämlich aus unendlich vielen,

jeweils nur untereinander verbundenen Paaren von Knoten. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zweielementigen Mengen, wobei, wie angekündigt, das Auswahlaxiom nicht gilt und wir uns darum wünschen können, dass $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$. Sei nun der Graph G definiert als:

$$\begin{cases} X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X_n \times \{n\}) \\ R = \{((x,n),(y,m)) \in X^2 | x \neq y \quad \text{und} \quad n = m\} \end{cases}$$

Jeder endliche Teilgraph von G ist offensichtlich 2-färbbar, man weist einfach je einem der Elemente eines Paares die 0 zu und dem anderen die 1. Angenommen aber, ganz G sei 2-färbbar, dann wäre je einem Element von $(X_n \times \{n\})$ die 0 zugewiesen, das Urbild des Homomorphismus f von 0 wäre also ein Element von $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, Wid. $\square$

5 Unerwünschte Ergebnisse mit dem Auswahlaxiom

Nachdem wir also gesehen haben, dass ohne das Auswahlaxiom vieles in der Mathematik nicht so funktioniert, wie man es gerne hätte und allgemein erwarten würde, stellt sich selbstverständlich die Frage, was so problematisch oder kontrovers an diesem Axiom ist. Direkt verwerfen müsste man es wohl, wenn es mit den anderen Axiomen unverträglich wäre, also zu Konflikten innerhalb der auf diesen Axiomen aufgebauten Mathematik führen würde. Ganz so drastische Folgerungen lassen sich zwar nicht aus dem Auswahlaxiom ableiten, meistens wird aber außer Widerspruchsfreiheit von der Mathematik noch gefordert, dass sie in irgendeiner Weise mit der Wirklichkeit korrespondiert, anwendbar ist etc. An diesem Punkt scheitert es leider mit dem Auswahlaxiom, wie das sogenannte Banach-Tarski Paradoxon zeigt.

Man stellt sich den Raum, in dem wir leben, im allgemeinen als den $\mathbb{R}^3$ vor, eventuell verbunden mit einer weiteren Dimension für die Zeit. Eine Kugel aus solidem Material könnte man sich weiters durch die Einheitskugel $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \leq 1\}$ repräsentiert vorstellen. Mithilfe des Auswahlaxioms lässt sich zeigen, dass diese Kugel, in mehrere Teile zerlegt und anschließend, nur durch Verdrehen, wieder zu zwei der ursprünglichen entsprechenden Kugeln zusammengesetzt werden kann. Es kann sogar gezeigt werden, dass eine Zerlegung in fünf Teile bereits ausreicht.

Stimmt also unsere Vorstellung vom Raum als $\mathbb{R}^3$ nicht, oder stellt das Auswahlaxiom doch eine zu starke Voraussetzung dar? Möglicherweise gibt es aber auch eine Antwort, die einen Mittelweg zwischen diesen schlägt, dass beispielsweise kein Festkörper tatsächlich unendliche Dichte hat, sondern nur aus einer Wolke Atomen besteht oder dergleichen. Dass sich aber das Volumen einer echten Kugel nicht durch Zerlegen, Verdrehen und anschließendes wieder Zusammensetzen verdoppeln lässt, sollte klar sein.

Der Beweis für dieses verblüffende Resultat ist etwas länger und besteht aus zwei Teilen, weswegen ich kurz die generelle Idee skizzieren werde, um anschließend einen genaueren Weg zu beschreiben, aus einer Kugel zwei zu machen. Für den Großteil des Beweises wird nicht die ganze Kugel, sondern lediglich deren Oberfläche $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = 1\}$ betrachtet. Die Punkte dieser Oberfläche werden einzeln durch Verdrehen beschriftet und diese Drehungen mit einer Gruppe identifiziert. Anschließend lassen sich die Punkte in vier Mengen unterteilen, von denen eine abzählbar ist und für die anderen ein Satz aus der Gruppentheorie gilt, nachdem diese jeweils zueinander kongruent sind, aber auch eine zu den beiden anderen kongruent ist. Hier findet also die eigentliche Verdoppelung statt. Hat man dies, so kann man die inneren Punkte der Kugel mit denen auf der Gerade vom Mittelpunkt zu diesem Punkt zur Kugeloberfläche identifizieren und so die gesamte Kugel verdoppeln [JuWe96, S. 151-153].

Als erstes sei also eine Gruppe $G = G_0 * G_1$ gegeben, die das freie Produkt der Gruppen $G_0 = \{e, \varphi\}$ und $G_1 = \{e, \psi, \psi^2\}$ ist. Diese beiden repräsentieren Drehungen um 180° bzw. 120° um geeignete, sich nicht gegenseitig aufhebende Achsen. Die Gruppe G enthält alle endlichen Verknüpfungen von φ, ψ und ψ^2, wobei $\varphi \circ \varphi = e$, $\psi \circ \psi \circ \psi = e$ und $\psi \circ \psi = \psi^{-1}$. G lässt sich also gekürzt als Verknüpfungen von abwechselnd φ und ψ bzw. ψ^{-1} schreiben. Diese Gruppe ist von nur abzählbarer Kardinalität, wie leicht zu zeigen ist, da sie nur endliche Folgen enthält.

Satz III.1.

Es gibt eine Partition $\{A, B, C\}$ von G, s.d. $A \circ \varphi = B \cup C$, $A \circ \psi = B$ und $A \circ \psi^{-1} = C$ ist.

Beweis von Satz III.1.
A, B und C werden folgendermaßen konstruiert, indem Elemente aus G nach und nach in eine dieser Gruppen eingeteilt werden, je nachdem, was ihr letztes Glied ist:
$e \in A, \quad \varphi, \psi \in B, \quad \psi^{-1} \in C.$
Sei jetzt $\alpha \in G$, Länge von $\alpha \geq 1$. Dann

Ang. α endet mit ψ oder ψ^{-1}:
(1) wenn $\alpha \in A$, dann $\alpha \circ \varphi \in B$. α wird also durch φ in B verschoben. Ebenso für die übrigen Fälle:
(2) wenn $\alpha \in B \cup C$, dann $\alpha \circ \varphi \in A$.

Ang. α endet mit φ:
(3) wenn $\alpha \in A$, dann $\alpha \circ \psi \in B$ und $\alpha \circ \psi^{-1} \in C$,
(4) wenn $\alpha \in B$, dann $\alpha \circ \psi \in C$ und $\alpha \circ \psi^{-1} \in A$,
(5) wenn $\alpha \in C$, dann $\alpha \circ \psi \in A$ und $\alpha \circ \psi^{-1} \in B$.

(i) $A \circ \varphi \subseteq B \cup C$: Wir betrachten im folgenden jeweils nur vollständig gekürzte Elemente. Sei $\alpha \in A$, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder α endet mit ψ oder ψ^{-1}, aus (1) folgt, dass $\alpha \circ \varphi$ in B liegt, oder α endet mit φ, die beiden φ kürzen sich, aus (2) folgt, dass es ein Element β aus $B \cup C$ gab, welches durch φ in A verschoben wurde, durch das zweite φ aber jetzt wieder nach $B \cup C$ zurück verschoben wird.

(ii) $B \cup C \subseteq A \circ \varphi$: Sei $\alpha \in B \cup C, \alpha = \beta \circ \psi$ oder $\alpha = \beta \circ \psi^{-1}$, (2) $\rightarrow \alpha \circ \varphi \in A \rightarrow \alpha = (\alpha \circ \varphi) \circ \varphi \in A \circ \varphi$. Sei $\alpha \in B \cup C, \alpha = \beta \circ \varphi$. Entweder $\beta = \{\} \rightarrow \alpha = e \circ \varphi \in A \circ \varphi$ oder (2) $\rightarrow \beta \in A \rightarrow \alpha \in A \circ \varphi$.

(iii) $A \circ \psi \subseteq B$: Sei $\alpha \in A, \alpha$ endet mit φ, (3) $\rightarrow \alpha \circ \psi \in B$. Endet α mit ψ, so lässt sich α schreiben als $\beta \circ \psi, (5) \rightarrow \beta \in C, \rightarrow \alpha \circ \psi = (\beta \circ \psi) \circ \psi = \beta \circ \psi^{-1}, (5) \rightarrow \beta \circ \psi^{-1} \in B$. Ist $\alpha = e$, so $\alpha \circ \psi = \psi \in B$.

(iv) $B \subseteq A \circ \psi$: Sei $\alpha \in B$, $\alpha = \beta \circ \psi, (3) \rightarrow \beta \in A$. Sei $\alpha = \beta \circ \psi^{-1}, (5) \rightarrow \beta \in C \rightarrow \beta \circ \psi^{-1} = (\beta \circ \psi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ \psi = (\beta \circ \psi) \circ \psi, (5) \rightarrow \beta \circ \psi \in A$. Sei $\alpha = \beta \circ \varphi = (\beta \circ \varphi \circ \psi^{-1}) \circ \psi, (4) \rightarrow \beta \circ \varphi \circ \psi^{-1} \in A$. (v) und (vi) sind aus Symmetriegründen analog zu (iii) und (iv). $\square$

Satz III.2. Es gibt eine Partition $\{X, Y, Z, Q\}$ von $\mathcal{S}$, wobei $|Q| = \omega$ s.d.

(1) $X \cong Y \cong Z$

(2) $X \cong Y \cup Z$.

Beweis von Satz III.2.
Seien φ und ψ wie in Satz III.1., dann erreicht man von einem beliebigen Punkt der Sphäre aus eine abzählbare Anzahl anderer Punkte durch Drehung, mit Ausnahme der Fixpunkte jeder Drehung. Von diesen gibt es aber pro Drehung nur zwei, die identische Abbildung e ausgenommen, insgesamt also auch nur abzählbar viele, diese Menge sei Q. Für jedes $x \in \mathcal{S} \setminus Q$ betrachten wir jetzt alle Punkte, die von diesem aus durch Drehung erreicht werden können und nennen diese Punkte den Orbit von x, $P_x = \{\alpha(x) : \alpha \in G\}$. Diese Orbits sind aufgrund der Tatsache, dass G eine Gruppe ist, also insbesondere abgeschlossen ist und jede Drehung eine Inverse hat, entweder ident oder disjunkt und decken die gesamte Menge $\mathcal{S} \setminus Q$ ab. An dieser Stelle kommt das Auswahlaxiom ins Spiel, in der Form, dass eine Auswahlmenge M existiert, die jeden dieser Orbits in genau einem Punkt schneidet. Somit erhält man:
$X = \{\alpha(a) : \alpha \in A, a \in M\}$,
$Y = \{\alpha(a) : \alpha \in B, a \in M\}$,
$Z = \{\alpha(a) : \alpha \in C, a \in M\}$.
Nach Satz III.I. gilt also: $\varphi[X] = Y \cup Z, \psi[X] = Y$ und $\psi^{-1}[X] = Z$, womit φ, ψ und ψ^{-1} die gewünschten Isomorphismen sind und der Satz gezeigt ist. □

Um $\mathcal{B}$ in gleichwertige Teile zerlegen zu können, benötigen wir noch folgende Relation:

Definition $\approx$ sei eine Relation auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, $X \approx Y$ wenn es Partitionen $(X_i)_{i<n}$ von X und $(Y_i)_{i<n}$ von Y gibt, $n < \omega$, s.d. $X_i \cong Y_i \quad \forall i < n$.

Satz III.3.

(1) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation.
(2) Wenn $(X_i)_{i<n}$ eine Partition von X und $(Y_i)_{i<n}$ eine Partition von Y ist mit $X_i \approx Y_i \quad \forall i < n \to X \approx Y$.
(3) Wenn $X' \subseteq Y \subseteq X$ und $X' \approx X$, dann auch $Y \approx X$.

Beweis von Satz III.3.
(i) folgt daraus, dass $\cong$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Benutze einfach $(X) = X$ bzw. $(Y) = Y$ als Partitionen.

(iii) $X' \approx X$, also gibt es Partitionen $(X_i)_{i<n}$ und $(X_i')_{i<n}$ von X und X', s.d. $X_i' \cong X_i \quad \forall i < n$. Als nächstes können wir für jedes $i < n$ eine Abbildung $f_i : X_i \to X_i'$ definieren, wobei f_i eine Isometrie ist und $f_i[X_i] = X_i'$. Sei $f := \bigcup_{i<n} f_i$ und $Z = \bigcup_{n<\omega}(f^n X \setminus f^n Y)$. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass $f[Z] \subseteq Z$: $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y) \subseteq \bigcup_{n<\omega}(f^n X \setminus f^n Y)$. Sei $f(f^n X \setminus f^n Y) \subseteq \bigcup_{n<\omega}(f^n X \setminus f^n Y) \to f(f^{n+1} X \setminus f^{n+1} Y) = (f^{n+2} X \setminus f^{n+2} Y) \subseteq \bigcup_{n<\omega}(f^n X \setminus f^n Y)$. Außerdem kann man X bzw. Y schreiben als $X = Z \cup (X \setminus Z)$ (trivial) und $Y = f[Z] \cup (X \setminus Z)$, sei $y \in Y \to y \in f[Z]$ oder $y \in X \setminus Z$, da $f[Z] \subseteq Z$. Sei $x \in X \setminus Y \to x \in Z \to x \notin X \setminus Z, f[Z] \subseteq X' \to f[Z] \subseteq Y \to x \notin f[Z]$. Schließlich impliziert $Z \cong f[Z]$, dass $Y \approx X$. □

Satz III.4. (Banach-Tarski Paradoxon)

Die Einheitskugel $\mathcal{B}$ lässt sich in zwei Mengen X und Y partitionieren, wobei $X \approx \mathcal{B}$ und $Y \approx \mathcal{B}$ gilt.

Beweis von Satz III.4.
Bis jetzt haben wir nur die Einheitssphäre $\mathcal{S}$ betrachtet, die Punkte von $\mathcal{B}$ können aber in ähnlicher Weise beschriftet werden, indem c als der Ursprung die Mitte der Kugel darstellt und alle Punkte auf einer Geraden zwischen c und einem Punkt a der Kugel äquivalent mit a beschriftet werden, also mathematisch ausgedrückt: Für $D \subseteq \mathcal{S}$ sei $\hat{D}$ die Menge aller Punkte $a \in \mathcal{B} \setminus \{c\}$, deren Projektion von c auf $\mathcal{S}$ in D liegen. Somit können wir aus unserer Partition $\{A, B, C, Q\}$ aus Satz III.2. eine Partition $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{Q}, \{c\}\}$ von $\mathcal{B}$ machen. Satz III.2. liefert: $\hat{A} \approx \hat{B} \approx \hat{C} \approx \hat{B} \cup \hat{C}$. Weiters sind $\hat{B}$ und $\hat{C}$ eine Partition von $\hat{B} \cup \hat{C}$ sowie $\hat{A}$ und $(\hat{B} \cup \hat{C})$ eine Partition von $\hat{A} \cup (\hat{B} \cup \hat{C})$. Satz III.3.(2) liefert, dass $\hat{B} \cup \hat{C} \approx \hat{A} \cup (\hat{B} \cup \hat{C}) \approx \hat{A} \cup \hat{B} \cup \hat{C}$. Satz III.3.(1) (Transitivität) schließlich liefert: $C \approx \hat{A} \cup \hat{B} \cup \hat{C}, A \approx \hat{A} \cup \hat{B} \cup \hat{C}$ und $B \approx \hat{A} \cup \hat{B} \cup \hat{C}$. Zusammen ergibt dies unsere erste neu zusammengesetzte Einheitskugel:

$$\hat{A} \cup \hat{Q} \cup \{c\} \cong \mathcal{B}$$

.

$\hat{B}$ und $\hat{C}$ haben wir noch übrig, die aber beide viel größer sind als $\hat{Q}$ oder $\{c\}$, diese können also leicht aus einer der beiden gewonnen werden. Zunächst wollen wir $\mathcal{S}$ so verdrehen, dass alle Fixpunkte Q nach $\mathcal{S} \setminus Q$ verschoben werden. Hierfür benötigen wir irgendeine Drehung $\alpha \notin G$. Offensichtlich gilt dann: $\alpha[Q] \subseteq A \cup B \cup C$. Zurück in unserer Kugel galt aber $\hat{C} \cong \hat{A} \cup \hat{B} \cup \hat{C}$, also gibt es $T \subseteq C$ mit $Q \cong T$ und $p \in C \setminus T$, welche die Rolle der Fixpunkte bzw. des Mittelpunktes erfüllen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\hat{A} \cup \hat{Q} \cup \{c\} \cong \hat{B} \cup \hat{T} \cup \{p\}$$

.
Offensichtlich gilt: $\hat{B} \cup \hat{T} \cup \{p\} \subseteq \hat{B} \cup \hat{C} \subseteq \mathcal{B}$, also $\hat{B} \cup \hat{C} \approx \mathcal{B}$. Wenn wir X als $\hat{A} \cup \hat{Q} \cup \{c\}$ und Y als $\hat{B} \cup \hat{C}$ definieren, so ist $\{X, Y\}$ unsere gesuchte Partition von $\mathcal{B}$. □

Auch wenn eine derartige Zerlegung einer Kugel in keinem Verhältnis zu tatsächlich vorstellbaren Zerlegungen steht, so beweist dieser Satz doch deren mathematische, und damit theoretische Möglichkeit, sollte das Auswahlaxiom in irgendeiner Weise als Grundlage nicht nur der Mathematik, sondern damit auch der Physik dienen. Alle übrigen nützlichen mathematischen Resultate, die mit dem Auswahlaxiom erkauft wurden, sollten jedenfalls mit der Anmerkung festgehalten werden, dass die Axiome, auf denen sie fußen, keinesfalls mehr die offensichtlichen Wahrheiten sind, die sie früher einmal waren.

Ein weiteres unerwünschtes Ergebnis der Annahme des Auswahlaxioms und in gewisser Weise ähnlich der Kluft zwischen mathematisch Möglichem und der Vorstellung über von der Mathematik repräsentierter Wirklichkeit ist die Existenz nicht messbarer Mengen. Auch hierbei handelt es sich nicht notwendigerweise um ein so ernsthaftes Problem, dass das Auswahlaxiom nur aus diesem Grund abzulehnen wäre, aber es zeigt sich wieder, dass unter Umständen mehr ermöglicht wird, als man sich von dem, was Mathematik leisten sollte, erwartet hatte [Her2006, S. 120].

Satz III.5. (Vitali-Mengen)

Es gibt Teilmengen der Reellen Zahlen, die nicht-messbar sind, genannt Vitali-Mengen.

Beweis von Satz III.5.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. $x \sim y \leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation:
$(x-x) = 0 \in \mathbb{Q}$
$(x-y) \in \mathbb{Q} \to (y-x) = -(x-y) \in \mathbb{Q}$
$(x-y) \in \mathbb{Q} \wedge (y-z) \in \mathbb{Q} \to (x-z) = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q}$.

Bezeichnet man mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so bilden diese eine Partition von $\mathbb{R}$. Betrachte nun die Menge $[0,1]$. Auf dieser gibt es nach dem Auswahlaxiom eine Auswahlmenge V, die von jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält.[1] Hierbei handelt es sich um die gesuchte Vitali-Menge. Angenommen, diese wäre Lebesgue-messbar. Betrachte als Nächstes die Menge $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, lässt sich diese auch als $\{q_1, q_2, q_3, ...\}$ schreiben. Nun betrachte die Mengen $V_r := \{v + q_r \quad | v \in V\}$. Wenn v in $[v]$ ist, so auch $v + q_r$, also sind die V_r paarweise disjunkt. Darum entspricht aufgrund der σ-Additivität das Maß von $\bigcup_r V_r$ der Summe der Maße der einzelnen V_r und aufgrund der Translationsinvarianz das Maß der V_r dem von V. Angenommen, V habe Maß 0, dann hat $\bigcup_r V_r$ dasselbe Maß wie $\sum_1^\infty V$, also ebenfalls 0. Es gilt aber: $[0,1] \subseteq \bigcup_r V_r$. Für $x \in [0,1]$ ist $(x-v) = q \in \mathbb{Q}$ für ein $v \in [x]$, dieses ist O.B.d.A gleich q_i, also $x = (v + q_i) \in V_i \in \bigcup_r V_r$. $[0,1]$ hat aber Maß 1, Wid. Angenommen also, V habe Maß > 0, dann hat $\bigcup_r V_r$ gleiches Maß wie $\sum_1^\infty V$, also ∞. Es gilt aber weiters: $\bigcup_r V_r \subseteq [-1,2]$. Diese Inklusion ist offensichtlich, $[-1,2]$ hat aber Maß 3, Wid. $\square$

Um diesem Problem zu entgehen, braucht es eine andere Erweiterung der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre als das Auswahlaxiom. Eine solche stellt das sogenannte Axiom der Determiniertheit dar, welches im folgenden Kapitel vorgestellt wird und als mögliche Alternative zum Auswahlaxiom angesehen werden kann.

[1] Wir bezeichneten die Auswahlmenge ursprünglich mit C, in diesem Fall nennen wir sie aber der Konvention folgend V.

6 Alternativen zum Auswahlaxiom

Wie wir gesehen haben, gibt es gewichtige Argumente für und wider die Inklusion des Auswahlaxioms in die Reihe der übrigen Axiome der Mengenlehre. Ohne es sind viele nützliche und zentrale Resultate der Mathematik nicht gültig, mit ihm dagegen kommt es zu paradoxen Ergebnissen ohne möglichen Bezug zu irgendwie gearteten Anwendungen. Wie in einer solchen Situation innerhalb der Mathematik üblich (im Gegensatz zur hier auftretenden grundlegenden Ungewissheit), kann man sich die Frage stellen, ob es nicht eine schwächere Form des Auswahlaxioms gibt, die zumindest teilweise die gewünschten Resultate rettet, ohne die unerwünschten Nebenwirkungen wie etwa das Banach-Tarski-Paradoxon.

Ein solcher Kandidat ist das sogenannte Axiom der Determiniertheit, welches von Jan Mycielski und Hugo Steinhaus vorgeschlagen wurde [JuWe96, S. 148]. Um dieses Axiom zu formulieren, benötigen wir zunächst einige Begriffe. Ein Spiel Γ_A ist die formalisierte Version eines Strategiespiels für zwei Spieler, welche mit Spieler I und Spieler II bezeichnet werden. Dieses läuft folgendermaßen ab: Spieler I wählt eine natürliche Zahl a_0, daraufhin wählt Spieler II eine natürliche Zahl b_0. Anschließend werden abwechselnd Zahlen $a_1, b_1, ...$ gewählt. Auf diese Art entsteht eine unendliche Reihe natürlicher Zahlen. Ist diese Element von $A \subseteq \omega^\omega$, also einer das Spiel Γ_A definierenden Teilmenge der unendlichen Folgen natürlicher Zahlen, so hat Spieler I gewonnen, andernfalls Spieler II. Da es aber in der Mathematik nicht eigentlich um das Spielen eines Spieles geht, wird zusätzlich der Begriff der Strategie eingeführt, die einem der beiden Spieler nach Art eines einfachen Algorithmus jeden Spielzug vorschreibt. Der einzige Input einer Strategie sind die bisherigen Spielzüge beider Spieler, wobei eine Strategie für Spieler I zusätzlich noch einen Startwert a_0 vorgibt. Bei einer Strategie handelt es sich also um eine Funktion $F : \bigcup_{n\in\omega} \omega^n \to \omega$, bzw. $G : \bigcup_{n\in\omega\setminus\{\emptyset\}} \omega^n \to \omega$ für Spieler II. Da die bisherigen eigenen Spielzüge ja bereits von den gegnerischen abhängen, reicht es, diese zu betrachten. Eine Strategie, die immer eine Folge in A liefert, also zum Sieg von Spieler I führt, wird eine *Gewinnstrategie* für diesen genannt. Eine Gewinnstrategie für Spieler II liefert entsprechend immer eine Folge $\notin A$. Gibt es eine solche Strategie für ein vorgegebenes Spiel, so sagt man, dieses sei determiniert. Somit lässt sich nun endlich das Axiom der Determiniertheit definieren:

Definition IV.1. (Axiom der Determiniertheit)
Jedes Spiel Γ_A ist determiniert $\forall A \subseteq \omega^\omega$.

Satz IV.2.

Höchstens einer der beiden Spieler kann eine Gewinnstrategie haben.

Beweis von Satz IV.2.
Sei Γ_A ein Spiel und F eine Gewinnstrategie für Spieler I. Bezeichne $\hat{F}$ alle möglichen Ausgänge von F, $\hat{F} := \{F * b : b \in \omega^\omega, b = \langle b_0, b_1, b_2, ...\rangle\}$. Es ist klar dass alle möglichen Gewinnstrategien für Spieler II in diesem $\hat{F}$ enthalten wären, $F * b$ aber in A ist $\forall b$ und

damit Spieler II keine Gewinnstrategie haben kann. Analog für alle möglichen Ausgänge $\hat{G} := \{a * G : a \in \omega^\omega, a = \langle a_0, a_1, a_2, ...\rangle\}$ für eine Strategie G von Spieler II.

Beispiel IV.3.
Sei $A = \{s_i : i \in \omega\}$ eine abzählbare Teilmenge von ω^ω und $G(a_0, ..., a_n) = s_n(2n) + 1$ für alle $\langle a_0, ..., a_n\rangle$. G ist eine Gewinnstrategie für Spieler II in Γ_A. Spieler I wählt eine Zahl, die sich anzunehmender Weise an Position 0 eines der s_i befindet. Spieler II wählt $s_n(2n) + 1$ welches sich von dem Eintrag von s_n in der Position $2n$ unterscheidet. Unabhängig von der Wahl von Spieler I wird also eine Folge erzeugt, die sich in jedem zweiten Eintrag von einem der s_i unterscheidet, mittels eines Diagonalargumentes kann diese also nicht in A liegen.

Beispiel IV.4.
Sei $B = \{s \in \omega^\omega : \forall n < \omega(s_{2n+1} + s_{2n+2} \text{ ist gerade })\}$. Spieler I hat folgende Gewinnstrategie: $F(b_0, ..., b_n) = b_n$. Für a_0 kann 0 gewählt werden.

Satz IV.5.

Aus dem Auswahlaxiom folgt, dass es ein Spiel Γ_A gibt, das nicht determiniert ist [Hal2012, S. 628].

Beweis von Satz IV.5.
Die Anzahl aller möglichen Strategien entspricht $2^{\aleph_0}$, oder der Kardinalität der reellen Zahlen. Mithilfe des Auswahlaxioms und (**Satz I.7.**) lässt sich diese Menge wohlordnen. Seien die Strategien für Spieler I und Spieler II also folgendermaßen nummeriert: $\{\sigma_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, $\{\tau_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$. Nun konstruieren wir Mengen A und B von Spielausgängen, um anhand eines Diagonalargumentes zu zeigen, dass keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie haben kann. Seien $A := \{x_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $B := \{y_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ folgendermaßen konstruiert: Hat man bereits $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ und $\{y_\xi : \xi < \alpha\}$, so wählt man ein b, s.d. der Spielausgang $\sigma_\alpha * b =: y_\alpha \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Ein solches y_α existiert wegen der Größe von $\{\sigma_\alpha * b : b \in \omega^\omega\}$. Äquivalent für $x_\alpha := \; a * \tau_\alpha$. Somit sind diese Mengen disjunkt und es gibt für jedes α für Spieler I ein a, das τ_α schlägt, sowie ein b für Spieler II, das σ_α schlägt. Keiner der beiden Spieler kann also eine Gewinnstrategie haben, womit das Spiel Γ_A nicht determiniert ist. $\square$

Das Auswahlaxiom widerspricht in diesem Sinne also dem Axiom der Determiniertheit, und zwar wieder in einer Weise, die als unschön angesehen werden könnte, wäre es doch erwünscht, wenn jedes Spiel determiniert wäre. Bei der Nicht-Determiniertheit eines gewöhnlichen Spieles könnte man etwa an die Möglichkeit eines Unentschieden oder Remis denken, wie es beispielsweise im Schach vorkommen kann. Diese Möglichkeit lässt sich ebenfalls modellieren, das Resultat unterscheidet sich allerdings nicht wesentlich von den bisherigen Spielen, das Auswahlaxiom lässt sich eben nur sehr schwer mit realen Gegebenheiten in Verbindung bringen.

Beispiel IV.6.
Sei (A, B, C) eine Partition von ω^ω. Das Spiel $\Gamma_{(A,B,C)}$ hat folgende möglichen Ausgänge:
Liegt das Ergebnis $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle$ des Spiels in A, so gewinnt Spieler I,
ist es in B, so gewinnt Spieler II,
liegt es in C, so ist das Spiel unentschieden.
Es lässt sich zeigen:

(1) Spieler I hat eine Gewinnstrategie für das gewöhnliche Spiel $\Gamma_A \leftrightarrow$ Spieler I hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\Gamma_{(A,B,C)}$. $(\rightarrow)$ Angenommen, Spieler I hat eine Gewinnstrategie für das Spiel Γ_A, kann also immer eine Folge in A erzwingen. Dies gilt offensichtlich auch, wenn das Komplement von A in B und C aufgeteilt wird. $(\leftarrow)$ ebenfalls trivial.

(2) Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\Gamma_{(A,B,C)} \leftrightarrow$ Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\Gamma_{A \bigcup C}$. Wenn Spieler II immer ein Ergebnis in B erzwingen kann, so ist dies gleichbedeutend damit, dass er ein Ergebnis im Komplement von $A \bigcup C$ erzwingen kann.

(3) Beide Spieler können zumindest ein Unentschieden erzwingen, $\leftrightarrow$ Spieler I eine Gewinnstrategie für das Spiel $\Gamma_{A \bigcup C}$ hat und Spieler II eine Gewinnstrategie für das Spiel Γ_A hat. Für Spieler I ist eine Gewinnstrategie für das Spiel $\Gamma_{A \bigcup C}$ gleichbedeutend damit, immer in $A \bigcup C$ landen zu können, was offensichtlich äquivalent damit ist, einen Sieg oder ein Unentschieden im Spiel $\Gamma_{(A,B,C)}$ einfahren zu können. Für Spieler II ist eine Gewinnstrategie im Spiel Γ_A gleichbedeutend damit, immer außerhalb von A landen zu können, was gleich $B \bigcup C$ und einen Sieg oder ein Unentschieden im Spiel $\Gamma_{(A,B,C)}$ garantiert.

Das Axiom der Determiniertheit andererseits aber liefert zumindest eine schwache Version des Auswahlaxioms, die zumindest manche der herkömmlichen Resultate rettet.

Satz IV.7.

Sei $X = \{X_i : i < \omega\}$ eine abzählbare Familie nichtleerer Teilmengen von ω^ω. Dann gibt es nach dem Axiom der Determiniertheit für X eine Auswahlfunktion [Hal2012, S. 628].

Beweis von Satz IV.7.
Betrachte das folgende Spiel: Spieler I spielt irgendeine Folge $\langle a_0, a_1, a_2, ...\rangle$. Wenn und nur wenn Spieler II nur Zahlen aus X_{a_0} spielt, gewinnt er oder sie das Spiel. Da dies offensichtlich stets möglich ist (X_{a_0} nichtleer!), kann Spieler I keine Gewinnstrategie haben, also hat Spieler II eine Gewinnstrategie τ, s.d. $f(X_n) := \tau * \langle n, 0, 0, 0, ...\rangle$ die gesuchte Auswahlfunktion ist. $\square$

Bemerkung
Streng genommen müsste eigentlich τ immer dasselbe Element aus X_n auswählen und $f(X_n)$ nur dieses zurückgeben.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass mit dem Axiom der Determiniertheit auch tatsächlich Ergebnisse erzielt werden können, die ohne das Auswahlaxiom nicht möglich wären.

Satz IV.8.

Aus dem Axiom der Determiniertheit folgt, dass jede Menge reeller Zahlen Lebesgue-messbar ist [Hal2012, S. 629f].

Beweis von Satz IV.8.
Es genügt, sich auf Teilmengen des Einheitsintervalls zu beschränken. Sei $\mathcal{S} \subset [0,1], Z \subset \mathcal{S}$ Lebesgue-messbar $\rightarrow Z$ ist Nullmenge $\forall Z \subset \mathcal{S}$, weiters sei $\varepsilon > 0$. Um das Axiom der Determiniertheit anwenden zu können, müssen wir ein Spiel konstruieren, bei dem es darum geht, das Intervall $\mathcal{S}$ abzudecken. Spieler I spielt eine Reihe $\langle a_0, a_1, a_2, ...\rangle, a_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \omega$ von Nullen und Einsen, welche zu einer reellen Zahl innerhalb des Intervalls folgendermaßen aufaddiert werden:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \tag{2}$$

Spieler II versucht, diese mit einer Vereinigung über endliche Vereinigungen einer Menge G^n von Intervallen mit rationalen Endpunkten abzudecken, wobei $\mu(G^n) \leq \varepsilon/2^{2(n+1)}$. Diese Menge G^n ist wohlordenbar und kann deshalb aufgelistet werden. Spieler II wählt aus diesen G^n jeweils eines aus, um schließlich die Vereinigung über diese zu spielen. Spieler I gewinnt also, wenn $a \in \mathcal{S}$ und $a \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} G^n_{b_n}$. Angenommen, σ sei eine Gewinnstrategie für Spieler I, dann kann man eine Funktion f konstruieren, die der von Spieler II gespielten Menge $b = \langle b_0, b_1, b_2, ...\rangle$ die von Spieler I gespielte Zahl $a = f(b)$ zuweist, wobei $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, ...\rangle = \sigma * b$. Diese ist stetig $\rightarrow Z = f(\omega^\omega)$ ist analytisch $\rightarrow Z$ ist messbar. Z ist zusätzlich eine Nullmenge, da $Z \subset \mathcal{S}$. Eine Nullmenge kann aber von einer abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=0}^{\infty} G^n_{b_n}$ abgedeckt werden, Wid. Spieler I hat also keine Gewinnstrategie, das Axiom der Determiniertheit besagt daher, dass Spieler II eine Gewinnstrategie τ hat. Als nächstes betrachten wir endliche Folgen $s = \langle a_0, a_1, ...a_n\rangle$, wobei $G^n_s = G^n_{b_n}$ die Menge ist, die τ Spieler II vorschreibt. Da τ eine Gewinnstrategie ist, liegt a in der Menge $\bigcup\{G_s : s \subset a\}$ und deshalb:

$$S \subset \bigcup\{G_s : s \in Seq(\{0,1\})\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s. \tag{3}$$

Wenn jetzt $s \in \{0,1\}^n, n \geq 1$, dann ist $\mu(G_s) \leq \varepsilon/2^{2n}$ und da es 2^n solche Folgen gibt, folgt

$$\mu(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) \leq \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \cdot 2^n = \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{4}$$

Daher ist $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in\{0,1\}^n} G_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon[(\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n) - 1] = \varepsilon(2-1) = \varepsilon \rightarrow \mathcal{S}$ ist eine Nullmenge. Sei $A \supset X$ Lebesgue-messbar und jedes messbare $Z \subset A \setminus X$ ist eine Nullmenge, so ist wegen dem bisher gezeigten und weil $\mathcal{S}$ beliebig war mit der Eigenschaft, dass jedes messbare $Z \subset \mathcal{S}$ eine Nullmenge ist, auch $A \setminus X$ eine Nullmenge und X als Komplement einer Nullmenge innerhalb einer messbaren Menge daher auch messbar. $\square$

Selbstverständlich gibt es aber auch andere Alternativen zum Auswahlaxiom, die auf offensichtlichere Weise mit diesem in Verbindung stehen und nicht erst den Umweg über die Definition von Spielen benötigt. Viele von ihnen setzen am schon öfters erwähnten kritischen Punkt der Unendlichkeit ein. Um endlich viele Wahlen zu treffen, benötigt man etwa überhaupt kein Auswahlaxiom, die ursprünglichen Axiome von **ZF** sind hier ausreichend. Wie sieht es aber mit schwächeren Arten der Unendlichkeit, etwa abzählbarer Unendlichkeit, aus? Dass es für jede abzählbare Familie nichtleerer Mengen eine Auswahlfunktion gibt, folgt nicht bereits aus **ZF**, jedoch lässt sich zwischen dem hierfür benötigten sogenannten Abzählbaren Auswahlaxiom noch das Beschränkte Auswahlaxiom einfügen, welches die Existenz unendlich langer, abzählbarer Folgen garantiert.

Definition IV.9. (Beschränktes Auswahlaxiom)
Sei X eine nichtleere Menge und R eine Relation auf X, s.d. $\forall x \in X \quad \exists y \in X : xRy$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_i R x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Definition IV.9. (Abzählbares Auswahlaxiom)
Jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtleerer Mengen X_n besitzt eine Auswahlmenge.

Bemerkung IV. 10
Dies ist wie beim Auswahlaxiom äquivalent dazu, dass das Cartesische Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ nichtleer ist.

Satz IV. 11 Es gilt:

(1) Auswahlaxiom $\rightarrow$ Beschränktes Auswahlaxiom.
(2) Beschränktes Auswahlaxiom $\rightarrow$ Abzählbares Auswahlaxiom [Her2006, S. 15].

Beweis von Satz IV. 11
(1): Betrachtet man für jedes $x \in X$ die (nichtleere) Menge der mit diesem x in Beziehung stehenden $y \in X$, so liefert das Auswahlaxiom aus jeder dieser Mengen genau ein Element, man braucht also nur noch bei einem beliebigen $x_0 \in X$ zu starten und das so ausgewählte Element der mit diesem x_0 in Relation stehenden zu nehmen, um rekursiv eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu erhalten.

(2): Wir werden das Beschränkte Auswahlaxiom benutzen, um ein Element des Cartesischen Produkts einer abzählbaren Folge zu konstruieren, also zu zeigen, dass dieses nichtleer ist. Sei dazu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Mengen X_n und $Y_n := \prod_{m\leq n} X_n$ sowie $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Y_n enthält also Folgen der Länge n mit Elementen $x_i \in X_i, i \in \{1, ..., n\}$ und Y enthält derartige Folgen beliebiger Länge. Sei R eine Relation auf Y, wobei

$(x_1, ..., x_n)R(z_1, ..., z_m) \leftrightarrow x_i = z_i, i \in \{1, ..., n\}$ und $m = n + 1$. Laut dem Beschränkten Auswahlaxiom gibt es eine unendlich lange Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y$, wobei $y_i R y_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Ein Glied dieser Folge ist also das gesuchte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. $\square$

Diese schwächeren bzw. alternativen Versionen des Auswahlaxioms liefern zwar interessante Resultate, keines von ihnen ermöglicht aber alle gewünschten Resultate ohne die dazugehörigen Unannehmlichkeiten und paradoxen Resultate.

7 Résumé

Wie sich gezeigt hat, gibt es eine Vielzahl zentraler Resultate in der Mathematik, die das Auswahlaxiom in einer seiner Formen benötigen. Man könnte sich zwar eine Mathematik ohne diese vorstellen, ganze Bereiche aber müssten komplett neu fundiert werden oder könnten in der Form, wie wir sie heute kennen, überhaupt nicht existieren. So ist beispielsweise die Funktionalanalysis vom in dieser Arbeit noch gar nicht erwähnten Satz von Hahn-Banach abhängig, für dessen Beweis das Lemma von Zorn benötigt wird. Das Auswahlaxiom uneingeschränkt anzuerkennen mag zwar teilweise monströse und unübersehbare Folgen haben, doch wird es heute, etwas mehr als hundert Jahre nach seiner erstmaligen expliziten Formulierung, wenn es auch früher schon implizit angenommen wurde, vom Großteil der Mathematiker akzeptiert. Dies mag zum einen damit zu tun haben, dass einmal gefundene und interessante sowie folgenreiche Resultate nicht ohne weiteres einfach aufgegeben werden, andererseits aber auch in der Natur der Sache liegen, da nämlich die meisten sich ohne das Auswahlaxiom ergebenden Probleme erst in der Anschauung und möglichen Anwendung in Erscheinung treten, nicht aber in der reinen Mathematik selbst. Dies kann ja auch gar nicht geschehen, führt das Auswahlaxiom ja zu keinem Widerspruch, sofern die übrigen Axiome von **ZF** nicht widersprüchlich sind, wie Kurt Gödel gezeigt hat [Goed38, S. 556f.]. Es bereitet aber zumindest noch soweit Unbehagen, sei es aufgrund unschöner Entdeckungen wie der Vitali-Mengen oder anderer auftretenden Probleme, dass nach Alternativen zum Auswahlaxiom gesucht wird und auch schon einige solche Kandidaten gefunden wurden, die jeweils eigene Möglichkeiten, aber auch Schwierigkeiten mit sich bringen.

8 Literatur

[Fra22] Fraenkel, Abraham: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* in: *Mathematische Annalen 86*. 1922.

[Goed38] Gödel, Kurt: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis.* In: *Proceedings of the U.S. National Academy of Sciences Band 24*. 1938.

[Hal2012] Halbeisen, Lorenz J.: *Combinatorial Set Theory. With a Gentle Introduction to Forcing.* London: Springer-Verlag 2012.

[Her2006] Herrlich, Horst: *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 2006.

[JuWe96] Just, Winfried/Weese, Martin: *Discovering Modern Set Theory I. The Basics.* American Mathematical Society 1996.

[Kun2007] Kunen, Kenneth: *The Foundations of Mathematics.* College Publications 2007.

[Zer04] Zermelo, Ernst: *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* in: *Mathematische Annalen 59*. 1904.