# UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 11, 12.06.2017

**Aufgabe 1.** Ein *Filter* $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ un $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
(2) wenn $X \in \mathcal{F}$ und $Y \in \mathcal{F}$, dann $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
(3) wenn $X \in \mathcal{F}$ ist und $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $X \subseteq Y$, dann auch $Y \in \mathcal{F}$.

Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$ heißt ein *Ultrafilter*, wenn für jede unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ entweder $A \in \mathcal{U}$ oder $\mathbb{N} \backslash A \in \mathcal{U}$. Beweisen Sie, mit Hilfe des Lemmas von Zorn, dass es für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$, einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ gibt.

**Aufgabe 2.** Sei $\alpha$ und $\beta$ Ordinalzahlen mit $\alpha \subseteq \beta$ und $\alpha \neq \beta$. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \beta$.
**Hinweis:** Betrachten Sie $\gamma := \min\{\xi : \xi \in (\beta \backslash \alpha)\}$ und zeigen Sie, dass $\gamma = \alpha$.

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie, dass für je zwei Ordinalzahlen $\alpha, \beta$ mit $\alpha \neq \beta$ entweder $\alpha \subset \beta$ oder $\beta \subset \alpha$.
**Hinweis:** Angenommen, es existieren $\alpha, \beta$ mit $\neg(\alpha \subseteq \beta) \wedge \neg(\beta \subseteq \alpha)$, betrachten Sie die kleinste Ordinalzahl $\alpha_0 \in \alpha \cup \{\alpha\}$, sodass es ein $\beta_0$ mit $\neg(\alpha_0 \subseteq \beta_0) \wedge \neg(\beta_0 \subseteq \alpha_0)$ gibt. Zeigen Sie, dass $\alpha_0 \cup \beta_0$ eine Ordinalzahl ist und verwenden Sie Aufgabe 2 um einen Widerspruch zu erreichen.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ eine Menge von Ordinalzahlen. Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ auch eine Ordinalzahl ist.

**Bemerkung:** Aus Aufgaben 2 und 3 folgt es, dass je zwei Ordinalzahlen vergleichbar sind. D.h. für je zwei Ordinalzahlen $\alpha, \beta$ gilt das Folgende: $\alpha = \beta$, oder $\alpha \in \beta$, oder $\beta \in \alpha$. Die Sammlung aller Ordinalzahlen ist aber keine Ordinalzahl, weil sie keine Menge ist. *Beweis:* Angenommen $X$ ist die Menge aller Ordinalzahlen, betrachten Sie $\gamma = \bigcup X$. Laut Aufgabe 4 ist $\gamma$ eine Ordinalzahl. Daraus folgt aber, dass $\gamma \in X$ und daher, dass $\gamma \in \gamma$. Widerspruch! $\square$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
*E-mail address*: vera.fischer@univie.ac.at