UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: ÜBUNGSBLATT 2, 10.03.2017

Aufgabe 1. (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)

(1) Zeigen Sie, dass kein $\mathcal{L}$-Term ein echtes Anfangsstück eines anderen $\mathcal{L}$-Terms ist.

(2) Sei $t = ft_1 \cdots t_n$ ein $\mathcal{L}$-Term, wobei f ein n-stelliges Funktionszeichen ist und $t_1, \cdots, t_n$ $\mathcal{L}$-Terme sind. Beweisen Sie, dass $f, t_1, \cdots, t_n$ eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ eine Sprache, wobei $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ endlich sind. Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass es nur endlich viele $\mathcal{L}$-Strukturen mit Universum A gibt.

Aufgabe 3. Geben Sie eine Sprache mit unendlich vielen nicht isomorphen Strukturen an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Notationen&Definitionen:

A. Sei $f : A^n \to A$ eine Funktion und sei B eine Teilmenge von A. Mit $f \upharpoonright B^n$ bezeichnen wir die Funktion mit Definitionsbereich B^n, wobei für $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in B^n$, $(F \upharpoonright B)(\bar{a}) = F(\bar{a})$ ist. Die Funktion $F \upharpoonright B^n$ nennen wir *die Einschränkung von F auf B^n*.

B. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Unterstruktur* von $\mathfrak{B}$ (schreibe $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) wenn $A \subseteq B$ und
   (a) für jedes n-stellige Relationssymbol R in $\mathcal{L}$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
   (b) für jedes n-stellige Funktionssymbol f in $\mathcal{L}$ ist $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$
   (c) für jede Konstante c in $\mathcal{L}$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Aufgabe 4. Sei F ein zweistelliges Funktionssymbol, R ein zweistelliges Relationssymbol. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, wobei $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{F\}$, $\mathcal{R} = \{R\}$. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $\mathbb{O}$ die Menge der ungerade natürlichen Zahlen, $\mathbb{E}$ die Menge der gerade natürlichen Zahlen, G die übliche Addition auf $\mathbb{N}$, R die Relation kleiner-gleich auf $\mathbb{N}$.

(1) Ist $(\mathbb{E}, \{G \upharpoonright \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}, \{R \cap \mathbb{E} \times \mathbb{E}\})$ eine $\mathcal{L}$-Struktur?

(2) Ist $(\mathbb{O}, \{G \upharpoonright \mathbb{O} \times \mathbb{O}\}, \{R \cap \mathbb{O} \times \mathbb{O}\})$ eine Unterstruktur von $(\mathbb{N}, \{G\}, \{R\})$?

Aufgabe 5. Sei F ein einstelliges Funktionssymbol. Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = (\emptyset, \{F\}, \emptyset)$ und die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ mit Universum $\mathbb{N}$, wobei $F^{\mathfrak{B}}(n) = 2017 * n$ für alle n. Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ mit Univerum A. Zeigen Sie, dass wenn $\exists b \in A (b \neq 0)$, dann A unendlich ist.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über dem Alphabet

$$\{\ (\ ,\ )\ ,\ \neg\ ,\ \wedge\ \} \cup \mathrm{Var}$$

und sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ eine Relation, wobei $(\phi, \psi) \in \mathcal{R}$ gdw. ϕ und ψ aussagenlogisch äquivalent sind. Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}$ ist, d.h. dass $\mathcal{R}$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`