UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 3, 17.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}_N = (\{\underline{0}\}, \{S, \underline{+}, \underline{\cdot}\}, \{\underline{\leq}\})$ die Sprache der natürlichen Zahlen. Sei $\mathfrak{N}$ die $\mathcal{L}_N$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$. Sei β eine Belegung, wobei $\beta(v_n) = 2n$ für alle $n \geq 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(1) $\mathfrak{N} \models (v_1 \underline{\cdot} (v_1 \underline{+} v_1)) \doteq v_4[\beta]$
(2) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \exists v_1 v_0 \underline{\leq} v_1[\beta]$
(3) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{+} v_0) \doteq v_1[\beta]$
(4) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{\cdot} v_0) \doteq v_1[\beta]$
(5) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \underline{\cdot} v_1) \doteq v_1[\beta]$
(6) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 \underline{\leq} v_2 \wedge v_2 \underline{\leq} v_1)[\beta]$

Aufgabe 2. Eine Formel, die keine Quantoren enthält heißt *quantorenfrei*. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) für jeden $\mathcal{L}$-Term t, $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{B}}[\beta]$
(2) für jede quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel φ, $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}$-Terme und $\mathcal{L}$-Formeln.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent sind.

Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A. Eine Teilmenge X von A^n heißt *definierbar in* $\mathfrak{A}$ wenn es eine Formel $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ gibt, so dass

$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $X \subseteq A^n$ definierbar und π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ ist, dann $\{\pi(a) : a \in X\} = X$.

Aufgabe 5. Sei $\mathcal{L}_0 = (\{\underline{0}\}, \{\underline{+}, \underline{\cdot}\}, \emptyset)$, $\mathcal{L}_1 = (\{\underline{0}\}, \{\underline{+}\}, \emptyset)$ Sprachen. Betrachten Sie die $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathfrak{A}$ und $\mathcal{L}_1$-Struktur $\mathfrak{B}$, wobei $A = B = \mathbb{R}$ und $\underline{+}^{\mathfrak{A}}, \underline{+}^{\mathfrak{B}}, \underline{0}^{\mathfrak{A}}, \underline{0}^{\mathfrak{B}}, \underline{\cdot}^{\mathfrak{A}}$ die üblichen Objekte auf $\mathbb{R}$ sind. Sei

$$X := \{(r_0, r_1) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < r_1\},$$

d.h. X ist die Kleiner-Beziehung auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(1) X definierbar in $\mathfrak{A}$ ist,
(2) X nicht definierbar in $\mathfrak{B}$ ist.

Hinweis: Um zu zeigen dass X in $\mathfrak{B}$ nicht definierbar ist, betrachten Sie einen geigneten Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`