UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK: ÜBUNGSBLATT 4, 24.03.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und φ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln. Zeigen Sie:

(1) $\vdash_{\mathcal{L}} \forall x\varphi \to \exists x\varphi$
(2) $\vdash_{\mathcal{L}} \forall x(\varphi \wedge \psi) \to (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$

Aufgabe 2. Sei K und H zwei einstellige Relationssymbole in $\mathcal{L}$. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig und welche nicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

(1) $\exists x(Hx \to \forall y Hy)$
(2) $\forall x Hx \vee \forall x Kx \to \forall x(Hx \vee Kx)$
(3) $\exists x Hx \wedge \exists x Kx \to \exists x(Hx \wedge Kx)$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $\phi_1, \cdots, \phi_n$ beweisbare $\mathcal{L}$-Formeln sind und $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \psi$ beweisbar ist, dann ist auch ψ beweisbar.
(2) ($\forall$-*Quantorenaxiome*) Wenn ϕ eine $\mathcal{L}$-Formel ist, t ein $\mathcal{L}$-Term und v eine Variable, die frei für t in ϕ ist, dann ist $\forall v\phi \to \phi_v^t$ beweisbar.
(3) ($\forall$-*Einführung*) Wenn ϕ und ψ $\mathcal{L}$-Formeln sind und v eine Variable ist, die nicht frei in ϕ vorkommt, dann ist mit $\phi \to \psi$ auch $\phi \to \forall v\psi$ beweisbar.

Hinweis: Benutzen Sie geignete Tautologien.

KURT GÖDEL RESEARCH CENTER, UNIVERSITY OF VIENNA, WÄHRINGERSTRASSE 25, 1090 VIENNA, AUSTRIA
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`