UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 5, 06.04.2017

Kompaktheitssatz

Aufgabe 1.
(1) Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und T eine $\mathcal{L}$-Theorie. Angenommen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T, dessen Universum wenigstens n paarweise verschiedene Elemente enthält. Zeigen Sie, dass es ein unendliches Modell von T gibt.
(2) Zeigen Sie, dass keine Theorie T für eine geeignete Sprache $\mathcal{L}$ existiert, deren Modelle genau die endlichen Gruppen sind.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine geeignete Formel, welche sicher stellt, dass das Universum eines Modells dieser Formel wenigstens n Elemente hat.

Henkintheorien

Aufgabe 2. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so dass:
(a) T ist eine Henkintheorie mit Konstantenmenge C;
(b) Für je zwei Konstanten c, d in C entweder $T \vdash c \doteq d$ oder $T \vdash \neg c \doteq d$;
(c) Es gibt zwei Konstanten a, b in C mit $T \vdash \neg a \doteq b$.
Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ,

$$T \vdash \varphi \text{ oder } T \vdash \neg\varphi.$$

Hinweis: Sei φ eine $\mathcal{L}$-Aussage. Betrachten Sie die Formel

$$\psi(x) = (\varphi \wedge x \doteq a) \vee (\neg\varphi \wedge x \doteq b).$$

Zeigen Sie, mit der Hilfe des Vollständigkeitssatzes, dass $T \vdash \exists x \psi(x)$. Benutzen Sie dann die Voraussetzung, dass T eine Henkintheorie ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine Sprache $\mathcal{L}$ und eine $\mathcal{L}$-Theorie T existieren, so dass T die Voraussetzungen (a) und (b) aus Aufgabe 2 erfüllt und es eine $\mathcal{L}$-Aussage φ gibt mit

$$T \nvdash \varphi \text{ und } T \nvdash \neg\varphi.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Theorie T mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $\mathfrak{A} \vDash T$, dann enthält das Universum von $\mathfrak{A}$ genau ein einziges Element. Es genügt z.B., dass die Formel $\forall x \forall y x \doteq y$ ein Element von T ist.

Aufgabe 4. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, so dass:
(a*) T ist eine Henkintheorie mit Konstantenmenge C;
(b*) Für je zwei Konstanten c, d in C entweder $T \vdash c \doteq d$ oder $T \vdash \neg c \doteq d$;
(c*) $T \nvdash \forall x \forall y x \doteq y$.
Zeigen Sie, dass für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ, $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass T Voraussetzung (c) aus Aufgabe 2 erfüllt.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at