UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 6, 28.04.2017

<u>*Peano-Arithmetik*</u>

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Assoziativität von + in PA. D.h. zeigen Sie, dass in PA

$$\forall m \forall n \forall q \; (m+q)+n = m+(q+n).$$

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über n.

<u>*Kompaktheitssatz*</u>

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{L}_N = \{\{\underline{0}\}, \{S, +, \cdot\}, \{<\}\}$ die Sprache der Arithmetik und $\mathfrak{N}$ das standard Modell von $\mathcal{L}_N$. Sei c eine neue Konstante und sei $\mathcal{L}$ die Sprache $\mathcal{L}_N \cup \{c\}$. Ferner, sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen und sei

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) := \{\varphi \mid \varphi \; \mathcal{L}_N\text{-Aussage}, \; \mathfrak{N} \vDash \varphi\}.$$

(1) Betrachten Sie die folgende Menge Γ von $\mathcal{L}$-Aussagen

$$\Gamma := \{\underline{0} < c, S\underline{0} < c, SS\underline{0} < c, \cdots\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$ konsistent ist.

(2) Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$. Zeigen Sie dass $\mathfrak{N}$ und

$$\mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}_N = (\{\underline{0}^{\mathfrak{A}}\}, \{S^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}\}, \{<^{\mathfrak{A}}\})$$

nicht isomorph sind.

(3) Sei $A \subseteq P$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n\underline{0}$ eine Abkürzung von $S \cdots S\underline{0}$, wobei das Symbol S n-mal auftritt, und sei $\Gamma(A)$ die folgende Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen:

$$\{\exists z \; S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in A\} \cup \{\neg \exists z S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in P \backslash A\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma(A)$ konsistent ist.

Aufgabe 3. (Satz von Löwenheim-Skolem aufwärts) Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie, die ein unendliches Modell hat. Zeigen Sie, dass es zu jeder Menge A ein Modell $\mathfrak{M}_A$ von T gibt, dessen Universum M_A mindestens so viele Elemente wie A enthält (d.h. es gibt eine injektive Abbildung von A nach M_A.)
Hinweis: Betrachten Sie die Theorie

$$T' = T \cup \{\neg c_a \doteq c_b : a, b \in A, a \neq b\},$$

wobei $C = \{c_a : a \in A\}$ eine geeignete Menge von neuen Konstanten ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Für jede konsistente Menge Φ von $\mathcal{L}$-Aussagen, sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \vDash \Phi$. Sei

$$\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \text{ konsistente Menge von } \mathcal{L}\text{-Aussagen}\}.$$

Ferner, für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ sei $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$. Zeigen Sie, dass:

(1) die Menge $\{X_\varphi \mid \varphi \; \mathcal{L}\text{-Aussage}\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet;
(2) jede Menge X_φ abgeschlossen ist;
(3) jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Hinweis zu (3): Betrachten Sie eine beliebige Überdeckung $\{X_\varphi : \varphi \in \Phi\}$ von Σ und zeigen Sie, dass es eine endliche Teilmenge Φ_0 von Φ gibt, so dass $\{\neg\varphi : \varphi \in \Phi_0\}$ nicht konsistent ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`