UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 7, 04.05.2017

Aufgabe 1. (Kriterium von Tarksi-Vaught) Sei $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum A. Eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ mit Universum C heißt *elementar* (bezeichnet $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$) , wenn

$$\mathfrak{A} \models \varphi[c_1, \cdots, c_n] \iff \mathfrak{C} \models \varphi[c_1, \cdots, c_n]$$

für alle $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ und $c_1, \cdots, c_n$ in C.

Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$ gdw. für alle $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ und alle $d_1, \cdots, d_n$ im Universum C von $\mathfrak{C}$, wenn es ein a im Universum A von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a, d_1, \cdots, d_n]$ gibt, dann gibt es auch ein $c \in C$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[c, d_1, \cdots, d_n]$.

Aufgabe 2. (Satz von Löwenheim-Skolem abwärts) Sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Struktur für eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ mit unendlichenm Universum B und sei A_0 eine abzählbare Teilmenge von B. Sei $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller $\exists$-Formeln der Sprache $\mathcal{L}$, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\varphi_i = \exists y \psi_i(\vec{x}, y)$ wobei $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_{n_i})$ die freien Variablen von φ_i bezeichnet. Für jedes $i \in \mathbb{N}$, sei $F_i : B^{n_i} \to B$ eine Abbildung, die wie folgt definiert ist:

$$F_i(\vec{a}) = \begin{cases} b, & \text{wenn } \exists b \in B(\mathfrak{B} \models \psi_i[\vec{a}, b]) \text{ wenn es mehr als ein solches } b \text{ gibt, dann wählen wir eins} \\ b_0, & \text{sonst, wobei } b_0 \text{ ein beliebiges fixiertes Element von } B \text{ ist.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass es eine abzählbare Menge $A \subseteq B$ gibt, so dass $A_0 \subseteq A$ ist und $\forall i \in \mathbb{N} \forall \vec{a} \in A^{n_i}(F_i(\vec{a}) \in A)$. Die Menge A wird **Skolem-Hülle** von A_0 genannt und wird mit $\mathfrak{hull}_{\mathfrak{B}}(A_0)$ bezeichnet.
(2) Zeigen Sie mit der Hilfe des Tarksi-Vaught Kriteriums, dass $\mathfrak{hull}_{\mathfrak{B}}(A_0)$ das Universum einer abzählbaren, elementaren Substruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen. Sei $\mathfrak{B}$ die Struktur mit Universum $\bigcup_n A_n$, wobei auch

(1) für jedes k-stellige Relationssymbol R, $R^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{R^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$,
(2) für jedes k-stellige Funktionssymbol f, $f^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{f^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$, und
(3) für jede Konstante c, $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}_0}$.

$\mathfrak{B}$ heisst *Limes* von $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wird mit $\lim_n \mathfrak{A}_n$ bezeichnet.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ wohldefiniert ist.
(2) Sei $(\mathfrak{A}_n)_n$ eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen so dass $\mathfrak{A}_n \preceq \mathfrak{A}_{n+1}$ für jedes n. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n \preceq \lim_n \mathfrak{A}_n$ für alle n.

Aufgabe 4. Finden Sie eine Kette von $\mathcal{L}$-Strukturen $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{A}_{n+1}$ für alle n, aber $\mathfrak{A}_n \not\equiv \lim_n \mathfrak{A}_n$.
Hinweis: Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at