UE GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2017): ÜBUNGSBLATT 8, 12.05.2017

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit hilfe der ZFC-Axiome:

(1) Für alle a, b, c, d gilt: $(a, b) = (c, d)$ genau dann wenn $a = c$ und $b = d$.
(2) Sind $a_1, \cdots, a_n$ Mengen, so gibt es eine Menge b, die genau $a_1, \cdots, a_n$ als Elemente enthält.
(3) Die Mengen $\{\}$, $\{\{\}\}$, $\{\{\{\}\}\}$, $\cdots$ sind paarweise verschieden.
(4) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Menge, die genau n Elemente enthält.
(5) Es gibt keine Mengen a, b mit $a \in b$ und $b \in a$.

Aufgabe 2. Eine Menge α heißt eine *Ordinalzahl* gdw.

- für alle $x \in \alpha$ gilt, dass $x \subset \alpha$, und
- die Relation $\in \restriction \alpha = \{(x, y) \in \alpha \times \alpha : x \in y\}$ eine lineare Ordnung auf α ist.

Zeigen Sie:

(1) $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.
(2) Wenn α eine Ordinalzahl ist, dann ist auch $\alpha + 1$ eine Ordinalzahl.
(3) Jedes $n \in \omega$ ist eine Ordinalzahl.
(4) ω is eine Ordinalzahl.
(5) Sei A eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist auch $\bigcup A$ eine Ordinalzahl.

Aufgabe 3. Für jede natürliche Zahl n sei A_n eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass

(1) $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar ist.
(2) $A_1 \times A_2 \times A_3$ abzählbar ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at