Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2018. február 16.

1. Mutassuk meg, hogy

(a)(!) megszámlálható sok teljes metrikus tér szorzata is teljes metrikus

(b)(!) megszámlálható sok szeparábilis topologikus tér szorzata is szeparábilis

(c)(!) megszámlálható sok lengyel tér szorzata is lengyel

(d)* $\mathfrak{c}$ sok szeparábilis tér szorzata is szeparábilis.

2. Lássuk be, hogy

(a) a Cantor-halmaz és 2^ω homeomorfak.

(b)(!) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és ω^ω homeomorfak.

3. (!) Legyen K kompakt lengyel tér és Y tetszőleges lengyel tér, fixáljunk egy d_Y teljes, kompatibilis metrikát Y-on. Jelölje $C(K,Y)$ a $K \to Y$ folytonos függvények családját. Ha $f, g \in C(K,Y)$ legyen $d(f,g) = \sup_{x \in K} d_Y(f(x), g(x))$. Végezetül legyen τ az $\{f \in C(K,Y) : f(C) \subset U\}$ alakú halmazok által generált topológia, ahol C kompakt és U nyílt. Lássuk be, hogy a d metrika, mely épp a τ topológiát határozza meg. Mutassuk meg, hogy $(C(K,Y), \tau)$ lengyel tér!

4. Legyen X szeparábilis Banach tér. Lássuk be, hogy X^* egységgömbje az erős topológiával lengyel tér! (Más szóval, legyen $B_1 = \{T \in C(X, \mathbb{R}) : T$ folytonos, lineáris $||T|| \leq 1\}$, és tekintsük azt a legszűkebb τ topológiát B_1-en, hogy minden $x \in X$-re a $T \mapsto T(x)$ leképezés folytonos; mutassuk meg, hogy lengyel teret kaptunk).

5.* Legyen X lengyel tér és jelölje $P(X)$ az $(X, \mathcal{B}(X))$ téren értelmezett valószínűségi mértékek terét ($\mathcal{B}(X)$ az X tér Borel részhalmazaniak családja, vagyis az a legszűkebb σ-algebra amely tartalmazza a nyílt halmazokat). Adjunk meg egy természetes topológiát $P(X)$-en, mellyel ellátva lengyel teret alkot.

6. Lássuk be, hogy

(a) $\mathbb{Q}$ univerzális megszámlálható rendezett halmaz.

(b) $(R, <)$ és $(\mathbb{Q}, <)$ izomorf rendezett halmazok pontosan akkor, ha

1. R megszámlálható
2. R-nek nincs legkisebb és legnagyobb eleme
3. R önmagában sűrű, azaz $x, y \in R,\ x < y \Rightarrow \exists z \in R,\ x < z < y$.

Definíció. Legyen X topologikus tér, és $A \subseteq X$. A *Banach-Mazur játékot* két játékos, I és II játssza a következőképpen: I kezdésével felváltva választanak X-beli $U_0, V_0, U_1, V_1, \ldots$ nemüres nyílt halmazokat, amikre teljesül, hogy $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots$. I nyer, ha $\bigcap_n V_n \subseteq A$, különben II nyer.

7. Két játékos a Banach-Mazur játékot játssza $\mathbb{R}$-en.

(a) Ki nyer, ha $A = \mathbb{Q}$?

(b) Igaz-e, hogy ha II nyer, akkor A megszámlálható?

(c)** Mely halmazokra nyer II?

A feladatsorok elérhetőek (lesznek) a `http://www.logic.univie.ac.at/~vidnyanszz77/` oldalon.