Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2016. március 2.

1. Mutassuk meg, hogy egy lengyel tér vagy megszámlálható, vagy tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt.

2. a) Ha egy topologikus térben legfeljebb kontinuum sok nyílt van, akkor legfeljebb kontinuum sok Borel halmaz van.
b) Végtelen lengyel térben kontinuum sok Borel halmaz van.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ megszámlálható, diszkrét topologikus terek, akkor $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ vagy véges, vagy homeomorf a 2^ω, az $\omega \times 2^\omega$ vagy az ω^ω terek valamelyikével.

4. Legyen X lengyel tér, $H \subseteq X$ és $\alpha < \omega_1$ tetszőleges. Ekkor $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(H) = \{A \cap H : A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)\}$, ugyanígy $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(H)$-ra, de $\mathbf{\Delta}^0_1(H)$-ra nem feltétlenül igaz.

5. Legyen X, Y lengyel tér, $f : X \to Y$ folytonos. Ekkor $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$ és ugyanígy $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-ra és $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$-ra.

6. Semmilyen $\alpha < \omega_1$-re sincs $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$-beli $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(\mathbb{R})$ univerzális halmaz.

7. Lássuk be, hogy $\{0,1\}^{\omega_1}$-ben nem minden zárt halmaz G_δ.

A feladatsorok elérhetőek (lesznek) a `http://www.logic.univie.ac.at/~vidnyanszz77/` oldalon.