Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2018. április 6.

1. Fixáljuk $2^{<\omega}$-beli elemek egy $(s_n)_{n\in\omega}$ sorozatát, úgy, hogy minden n-re s_n hossza n, és $\forall t \in 2^{<\omega}\exists n(t \sqsubseteq s_n)$. Legyen $\mathbb{G}_{(s_n)_{n\in\omega}}$ a következő gráf 2^ω-n:

$$xEy \iff \exists n \in \omega \exists i \neq j \in 2 \exists z \in 2^\omega (x = s_n \frown i \frown z \text{ és } y = s_n \frown j \frown z).$$

a) Mik $\mathbb{G}_{(s_n)_{n\in\omega}}$ összefüggőségi komponensei? Mennyi a kromatikus száma?

b) Mennyi a *Borel kromatikus száma* (vagyis az a minimális κ, hogy létezik Y lengyel tér, $c : 2^\omega \to Y$ Borel színezés, hogy $|ran(c)| = \kappa$)?

2. a) Ha (X, τ) lengyel tér, $B_1, B_2, \dots \subseteq X$ Borel halmazok, akkor van olyan $\tau' \supseteq \tau$ lengyel topológia, hogy $B_n \in \mathbf{\Delta}^0_1(\tau')$ minden n-re.

b) Ha (X, τ) lengyel tér, $f : X \to \mathbb{R}$ Borel, akkor van olyan $\tau' \supseteq \tau$ lengyel topológia, hogy $f : (X, \tau') \to \mathbb{R}$ folytonos.

3. Ha (X, τ) lengyel tér, minden $n \in \mathbb{N}$-re $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_\xi(\tau)$, akkor van olyan $\tau \subseteq \tau' \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\xi(\tau)$ lengyel topológia, amire minden n esetén $A_n \in \mathbf{\Delta}^0_1(\tau')$.

4. a) Van olyan $F \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ relatív zárt, ami folytonos bijekcióval $(0, 1)$-re képezhető.

b) Ha X lengyel tér, $B \subseteq X$ Borel halmaz, akkor B előáll, mint $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ egy zárt részhalmazának folytonos injektív képe.

5. Az alábbi halmazokról bizonyítsuk be, hogy analitikusak vagy koanalitikusak!

a) $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap B \neq \emptyset\}$, ahol X lengyel tér és $B \subseteq X$ Borel;

b) $\big\{(a_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : (\exists k_1 < k_2 < \dots)\ a_{k_1} | a_{k_2}, a_{k_2} | a_{k_3}, \dots\big\}$;

c) differenciálható függvények $C([0, 1])$-ben.

6. Lássuk be, hogy minden lengyel tér beleinjektálható a Cantor-halmazba egy Borel leképezéssel.

7. (Effros Borel tér) Legyen X lengyel tér, $\mathcal{F}(X)$ jelölje X zárt halmazainak rendszerét. Legyen $\mathcal{B}$ az

$$\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

alakú halmazok által generált σ-algebra, ahol $U \subseteq X$ nyílt. Lássuk be, hogy $\mathcal{F}(X)$ Effros Borel tere, $(\mathcal{F}(X), \mathcal{B})$ standard Borel tér előbb $X = \omega^\omega$-ra, majd általában is.

8. a) Lássuk be, hogy a lengyel terek természetes módon standard Borel teret alkotnak.

b) Azt is mutassuk meg, hogy a kompakt metrikus terek ennek a térnek Borel része.

A feladatsorok elérhetőek (lesznek) a `http://www.logic.univie.ac.at/~vidnyanszz77/` oldalon.