Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2018. április 20.

1. Lássuk be, hogy $\mathbf{\Sigma}^1_n$-determináltság $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Pi}^1_n$-determináltság.

2. Ha X lengyel tér és $A \subseteq X$ analitikus, akkor A Baire tulajdonságú.

3. Egy $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ fa pontosan akkor jól-fundált, ha a T-re megszorított Kleene-Brouwer rendezés jólrendezés.

4. A cut-and-choose játék egy X perfekt lengyel téren zajlik, melyen adott egy d teljes metrika, egy $A \subseteq X$ halmaz és egy megszámlálható bázis. I és II játszanak a következőképpen:

$$\begin{array}{lllll} I & (U^0_0, U^0_1) & (U^1_0, U^1_1) & & \cdots \\ II & & i_0 & i_1 & \cdots \end{array}$$

ahol U^n_i bázisnyíltak, $\operatorname{diam}(U^n_i) < 2^{-n}$, $\overline{U^n_0} \cap \overline{U^n_1} = \emptyset$, $i_n \in \{0,1\}$ és $\overline{U^{n+1}_0 \cup U^{n+1}_1} \subseteq U^n_{i_n}$. Legyen $x \in X$ az az elem, amire $\{x\} = \bigcap_n U^n_{i_n}$. A játék egy lefolyását pontosan akkor nyeri I, ha $x \in A$. Lássuk be, hogy

i) I-nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A tartalmaz egy Cantor-halmazt,

ii) II-nek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha A megszámlálható.

5. Lássuk be, hogy bármely két standard Borel téren értelmezett folytonos (azaz minden pont nullmértékű) Borel valószínűségi mérték izomorf, azaz van olyan Borel izomorfizmus, ami mindkét irányban mértéktartó.

6. Legyen X lengyel tér. Lássuk be, hogy

a) $\{(K, L) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : K \subseteq L\} \subseteq \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X)$ Borel,

b) $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \text{ perfekt}\}$ Borel,

c) $\{K \in \mathcal{K}(X) : K \text{ nem megszámlálható}\}$ analitikus.

A feladatsorok elérhetőek (lesznek) a `http://www.logic.univie.ac.at/~vidnyanszz77/` oldalon.