Leíró halmazelmélet gyakorlat, 2018. május 27.

1. Lássuk be, hogy a Borel halmazok osztályára nem teljesül az uniformizáció.

2. Fogalmazzunk meg minél szebb feltételt egy $\mathbf{\Gamma}$ halmazosztályra, melynek teljesülése esetén az uniformizációból következik a redukció.

3. a) Lássuk be, hogy ha X, Y két nem megszámlálható lengyel tér és minden $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$ halmazra teljesül a perfekt halmaz tulajdonság, akkor minden $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(Y)$ halmazra is teljesül.
b) Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $\mathbf{\Sigma}^1_2$ halmaz, ami nem rendelkezik a perfekt halmaz tulajdonsággal, akkor létezik olyan $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmaz is.

4. Lássuk be, hogy ha X lengyel tér és $H \in \mathbf{\Sigma}^1_2(X)$ nem megszámlálható, akkor $|H| = \aleph_1$ vagy c.

5. Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Borel halmazok. Tekintsük a Wadge játékot: két játékos felváltva mond számjegyeket $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-beli számokhoz, I. építi $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-et, II. építi $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-et. II. nyer, ha $x \in A \Leftrightarrow y \in B$. Gondoljuk meg a Martin-tétel felhasználásával, hogy ez a játék eldöntött.

Bizonyítsuk be Wadge lemmáját, ami azt mondja, hogy ha $A, B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ két Borel halmaz, akkor $A \leq_W B$ vagy $B \leq_W A^c$.

6. Nincsen analitikus Hamel bázis.

7. Legyen $CN_0 = \{(f_n) \in C([0,1])^\omega : f_n \to 0 \text{ pontonként}\}$ és legyen $CN = \{(f_n) \in C([0,1])^\omega : f_n \text{ pontonként konvergens}\}$. Lássuk be, hogy CN_0 és CN teljes koanalitikus halmazok $C([0,1])^\omega$-ban.

A feladatsorok elérhetőek (lesznek) a `http://www.logic.univie.ac.at/~vidnyanszz77/` oldalon.