UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK SS 2016

VERA FISCHER

Die Gesamtnote ergibt sich je zur Hälfte aus der Teilnote Kreuzerlliste und der Teilnote Zwischentest, gerundet auf "freundlichen" Weise. Für eine positive Benotung müssen beide Teilnoten positiv sein.

Teilnote Kreuzerlliste:
60% - 69% - 4
70% - 79% - 3
80% - 89% - 2
90%-100% - 1

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 1, 08.03.2016

Aufgabe 1. Zeigen Sie dass jede Formel gleichviele Rechtsklammern wie Linksklammern hat.

Aufgabe 2. Eine Formel heisst allgemeingültig, wenn $\beta \models \varphi$ für jede Belegung β. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Formeln (de Morgansche Gesetze) allgemeingültig sind:

(1) $(\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$
(2) $(\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$

Aufgabe 3. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig und welche nicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

(1) $((X \to Z) \to ((Y \to Z) \to ((X \vee Y) \to Z)))$
(2) $((X \to Y) \to ((X \to \neg Y) \to \neg X))$
(3) $((X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X))$
(4) $(\neg X \to (X \to Y))$
(5) $(\neg X \to (Y \to X))$

Aufgabe 4. Benutzen Sie Aussagenlogik um die fogenden Fragen zu beantworten:

(1) Wenn es regnet, dann sind die Strassen nass. Die Strassen sind nicht nass. Regnet es?
(2) Rose geht zur Party nur, wenn Johannes auch dabei ist. Johannes geht nur, wenn Peter oder Lily dabei ist. Peter kann nicht.
    (a) Wenn Lily nicht hin geht, geht Rose zur Party?
    (b) Wenn Lily zur Party geht, muss dann Rose oder Johannes unbedingt dort sein?

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 2, 16.03.2016

Aufgabe 1. Ein Wort w ist eine *(echte) Teilformel* der Formel φ, wenn w eine Formel ist und es Wörte w_1, w_2 gibt mit $w_1 w w_2 = \varphi$ (und w_1, w_2 sind nicht beide leer). Zeigen Sie, dass alle Teilformeln von φ im rekursiven Aufbau von φ vorkommen müssen. Das heisst:

(1) Eine Primformel hat keine echten Teilformeln.
(2) Eine echte Teilformel von $\neg\psi$ ist eine Teilformel von ψ.
(3) Eine echte Teilformel von $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ist eine Teilformel von ψ_1 oder von ψ_2.
(4) Eine echte Teilformel von $\exists x\psi$ ist eine Teilformel von ψ.

Aufgabe 2. Sei $L_N = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ die Sprache der natürlichen Zahlen. Sei $\mathfrak{N}$ die L_N-Struktur mit Grundmenge $\mathbb{N}$. Sei β eine Belegung, wobei $\beta(v_n) = 2n$ für alle $n \geq 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

(1) $\mathfrak{N} \models (v_1 \cdot (v_1 + v_1)) \doteq v_4[\beta]$
(2) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \exists v_1 v_0 < v_1[\beta]$
(3) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 + v_0) \doteq v_1[\beta]$
(4) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \cdot v_0) \doteq v_1[\beta]$
(5) $\mathfrak{N} \models \exists v_0 (v_0 \cdot v_1) \doteq v_1[\beta]$
(6) $\mathfrak{N} \models \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1)[\beta]$

Aufgabe 3. Sei L_N, $\mathfrak{N}$, β wie in Aufgabe 2. Berechnen Sie:

(1) $t_1^{\mathfrak{N}}[\beta]$, wobei $t_1 = \underline{0}$,
(2) $t_2^{\mathfrak{N}}[\beta]$, wobei $t_2 = (S(S(\underline{0})) \cdot v_{2016} + (S(v_{2015}) + t_1))$,
(3) $t_3^{\mathfrak{N}}[\beta]$, wobei $t_3 = S(t_1) \cdot t_1$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche nicht? Begründen Sie ihre Antwort. Sei x eine Variable.

(1) $\mathfrak{N} \models \exists x (S(S(\underline{0})) \cdot x \doteq t_2)[\beta]$
(2) $\mathfrak{N} \models S(S(\underline{0})) \cdot x \doteq S(t_2)[\beta]$
(3) $\mathfrak{N} \models \exists x (x \cdot S(t_3)) \doteq S(\underline{0})[\beta]$.

Wenn β_1 eine Belegung ist, so dass $\beta_1(v_m) = 0$ für alle $m \geq 0$, ist dann

$$\mathfrak{N} \models \exists x (x \cdot S(t_3)) \doteq S(\underline{0})[\beta_1]$$

richtig oder falsch? Berechenen Sie die Werte: $t_1^{\mathfrak{N}}[\beta_1]$, $t_2^{\mathfrak{N}}[\beta_1]$ und $t_3^{\mathfrak{N}}[\beta_1]$.

Aufgabe 4. Sei P ein einstelliges Relationssymbol, f ein zweistelliges Funktionssymbol und sei $L = \{P, f\}$. Für jede der folgenden Formeln φ

(1) $\forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_0$

(2) $\exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \doteq v_1$
(3) $\exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$

finden Sie jeweils L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und Belegungen β, γ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi[\gamma]$.
Hinweis: Man betrachte geeigneten Strukturen mit einelementigen bezüglich zweielementigen Universum.

Aufgabe 5. Sei ρ eine einstellige Funktion über $\mathbb{R}$ und Δ die zweistellige Abstandsfunktion über $\mathbb{R}$, d.h. $\Delta(r_1, r_2) = |r_0 - r_1|$ für $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$. Betrachte die Sprache

$$L = \{+,\ \cdot\ , 0,\ 1,\ <,\ f,\ d\},$$

wobei f ein einstelliges und d ein zweistelliges Symbol ist. Sei

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}},\ \cdot^{\mathfrak{A}},\ 0^{\mathfrak{A}},\ 1^{\mathfrak{A}},\ <^{\mathfrak{A}},\ f^{\mathfrak{A}},\ d^{\mathfrak{A}})$$

eine L-Struktur, wobei $+^{\mathfrak{A}}$, $\cdot^{\mathfrak{A}}$, $0^{\mathfrak{A}}$, $1^{\mathfrak{A}}$, $<^{\mathfrak{A}}$ die üblichen Objekte auf $\mathbb{R}$ sind, $f^{\mathfrak{A}} := \rho$ und $d^{\mathfrak{A}} := \Delta$. Man symbolisiere mit L die folgenden Aussagen:

(1) Jede positive reelle Zahl besitzt eine positive Quadratwurzel.
(2) Wenn ρ streng monoton ist, dann ist ρ injektiv.
(3) ρ ist auf $\mathbb{R}$ stetig.
(4) ρ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmässig stetig.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 3, 05.04.2016

Aufgabe 1. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. Dann heisst $\mathfrak{A}$ *Unterstruktur* von $\mathfrak{B}$ (bezeichnet $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$) wenn $A \subseteq B$ und

(1) für n-stelliges $R \in L$, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
(2) für n-stelliges $f \in L$ ist $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$
(3) für Konstanten $c \in L$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Zeigen Sie, dass für jede nicht-leere Teilmenge X von $\mathfrak{B}$ es eine Unterstruktur $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ gibt, so dass $X \subseteq A$ und für alle $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $X \subseteq C$ gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$. Die Struktur $\mathfrak{A}$ wird durch $\langle X \rangle^{\mathfrak{B}}$ bezeichnet und heisst *die von X in $\mathfrak{B}$ erzeugte Unterstruktur*. **Hinweis:** Die Struktur $\langle X \rangle^{\mathfrak{B}}$ hat Universum

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{t^{\mathfrak{B}}[b_1, \cdots, b_n] : b_1, \cdots, b_n \in X,\ t(x_1, \cdots, x_n)\ L\text{-term}\}.$$

Aufgabe 2. Eine Formel, die keine Quantoren enthält heisst *quantorenfrei*. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) für jeden L-Term t, $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{B}}[\beta]$
(2) für jede quantorenfreie L-Formel φ, $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$.

Hinweis: Benutzen Sie Induktion über den Aufbau der L-Terme und L-Formeln.

Aufgabe 3. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ L-Strukturen. Eine Abbildung $\pi : A \to B$ heisst *Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$* (bezeichnet $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) wenn

(1) π eine Bijektion von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ ist,
(2) für n-stelliges Relationssymbol $R \in L$ und $a_1, \cdots, a_n \in A$:

$$(a_1 \cdots a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw } (\pi(a_1) \cdots \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}},$$

(3) für n-stelliges Funktionssymbol $f \in L$ und $a_1, \cdots, a_n \in A$:

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \cdots, \pi(a_n)),$$

(4) für Konstanten $c \in L$, $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ ist.

Die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heissen *isomorph* wenn es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.

(1) Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass für jede Formel $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ und alle $a_1, \cdots, a_n$ in A,

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \cdots, a_{n-1}] \text{ gdw } \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_0), \cdots, \pi(a_{n-1})].$$

(2) Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Teilmenge X von A^n heisst *definierbar in* $\mathfrak{A}$ wenn es eine Formel $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ gibt, so dass

$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]\}.$$

Zeigen Sie, dass wenn $X \subseteq A^n$ definierbar und π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ ist, dann $\{\pi(a) : a \in X\} = X$.

Aufgabe 4. Sei $L_0 = \{+, \cdot, \underline{0}\}$, $L_1 = \{+, \underline{0}\}$ Sprachen. Betrachten Sie die L_0-Struktur $\mathfrak{A}$ und L_1-Struktur $\mathfrak{B}$, wobei $A = B = \mathbb{R}$ und $+^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{B}}, \underline{0}^{\mathfrak{A}}, \underline{0}^{\mathfrak{B}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$ die üblichen Objekte auf $\mathbb{R}$ sind. Sei

$$X := \{(r_0, r_1) \in \mathbb{R}^2 : r_0 < r_1\},$$

d.h. X ist die Kleiner-Beziehung auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(1) X defnierbar in $\mathfrak{A}$ ist,
(2) X nicht definierbar in $\mathfrak{B}$ ist.

Hinweis: Um zu zeigen dass X in $\mathfrak{B}$ nicht defnierbar ist, betrachten Sie einen geigneten Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 4, 12.04.2016

Aufgabe 1. Sei L eine Sprache und φ, ψ L-Formeln. Zeigen Sie:

(1) $\vdash_L \forall x\varphi \to \exists x\varphi$
(2) $\vdash_L \forall x(\varphi \wedge \psi) \to (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$

Aufgabe 2. Sei K und H zwei einstelligen Relationssymbole in L. Welche der folgenden Formeln sind allgemeingültig und welche nicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

(1) $\exists x(Hx \to \forall yHy)$
(2) $\forall xHx \vee \forall xKx \to \forall x(Hx \vee Kx)$
(3) $\exists xHx \wedge \exists xKx \to \exists x(Hx \wedge Kx)$.

Aufgabe 3. Sei P ein zweistelliges Relationssymbol and sei φ die Formel:

$$(\forall xPxx \wedge \forall x\forall y\forall z(Pxy \wedge Pyz \to Pxz) \wedge \forall x\forall y(Pxy \vee Pyx) \to \exists x\forall yPxy).$$

(1) Beweisen Sie, dass wenn $\mathfrak{M}$ eine Struktur mit endlichem Universum ist, dann $\mathfrak{M} \vDash \varphi$.
(2) Zeigen Sie, dass es eine Struktur $\mathfrak{M}$ (mit undenlichem Universum) gibt, so dass $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q := \{\langle m_1, m_2, m_3\rangle : m_1 + m_2 = m_3\}$$

nicht definierbar in $\langle \mathbb{N}, \cdot^{\mathbb{N}}\rangle$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie den Isomorphismus $\Phi : \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ von $\langle \mathbb{N}, \cdot^{\mathbb{N}}\rangle$ auf $\langle \mathbb{N}, \cdot^{\mathbb{N}}\rangle$, der 3 und 5 in der Primfaktorzerlegung von n vertauscht (z.B. für $n = 5^5 3^3 7^4$ ist $\Phi(n) = 3^5 5^3 7^4$).

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 5, 19.04.2016

Aufgabe 1. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ ist *elementar*, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi[c_1, \cdots, c_n] \iff \mathfrak{C} \models \varphi[c_1, \cdots, c_n]$ für alle $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ und $c_1, \cdots, c_n$ in C. Man schreibt $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$.

Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$ gdw für alle $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ und alle $d_1, \cdots, d_n$ in C, wenn es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a, d_1, \cdots, d_n]$ gibt, dann gibt es auch ein $c \in C$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[c, d_1, \cdots, d_n]$.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \cdots$ eine Kette von L-Strukturen. Sei $\mathfrak{B}$ die Struktur mit Universum $\bigcup_n A_n$, wobei auch

(1) für jedes k-stellige Relationssymbol R, $R^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{R^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$,
(2) für jedes k-stellige Funktionssymbol f, $f^{\mathfrak{B}} := \bigcup\{f^{\mathfrak{A}_n} : n \in \mathbb{N}\}$, und
(3) für jede Konstante c, $c^{\mathfrak{B}} := c^{\mathfrak{A}_0}$.

$\mathfrak{B}$ heisst *Limes* von $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wird mit $\lim_n \mathfrak{A}_n$ bezeichnet.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ wohldefiniert ist.
(2) Sei $(\mathfrak{A}_n)_n$ eine Kette von L-Strukturen so dass $\mathfrak{A}_n \preceq \mathfrak{A}_{n+1}$ für jedes n. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}_n \preceq \lim_n \mathfrak{A}_n$ für alle n.

Aufgabe 3. Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ heissen *elementar äquivalent* (bezeichnet $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die gleichen L-Sätze erfüllen. Finden Sie eine Kette von L-Strukturen $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{A}_{n+1}$ für alle n, aber $\mathfrak{A}_n \not\equiv \lim_n \mathfrak{A}_n$.
Hinweis: In Übungsblatt 3 wurde es gezeigt, dass wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Aufgabe 4. Sei T eine L-Theorie und φ eine L-Formel. Zeigen Sie, dass $T \vdash_L \varphi$ gdw es eine endliche Folge $\langle\varphi_0, \cdots, \varphi_n\rangle$ von L-Formeln gibt, wobei $\varphi_n = \varphi$ und für jedes $k \leq n$ gilt:

- $\varphi_k \in T$, oder
- φ_k eine Tautologie ist, oder
- φ_k ein Gleichheitsaxiom ist, oder
- φ_k ein $\exists$-Quantorenaxiom ist, oder
- $\varphi_j = (\varphi_i \to \varphi_k)$ für gewisse $i, j < k$, oder
- $\varphi_k = (\exists x\psi \to \chi)$ für gewisse L-Formeln ψ, χ, wobei x nicht frei in χ vorkommt und $\varphi_j = (\psi \to \chi)$ für gewisse $j < k$.

Hinweis: Für die Richtung $(\leftarrow)$ zeigen Sie per Induktion über i, dass für alle $\mathfrak{A}$, β mit $\mathfrak{A} \models T$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta]$ und verwenden Sie den Vollständigkeitssatz.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 6, 26.04.2016

Aufgabe 1. Sei Γ eine Theorie, die Henkinsch mit Konstantmenge C ist. Für je zwei Konstanten c, d in C entweder $\Gamma \vdash c \doteq d$ oder $\Gamma \vdash \neg c \doteq d$. Angenommen dass es zwei Konstanten a, b in C mit $\Gamma \vdash \neg a \doteq b$ gibt, zeigen Sie dass Γ vollständig ist.
Hinweis: Für jeden L-Satz φ, betrachten Sie die Formel

$$\exists x((\varphi \wedge x = a) \vee (\neg\varphi \wedge x = b)).$$

Aufgabe 2. Sei $L_N = \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ die Sprache der Arithmetik, sei c eine neue Konstante und sei L die Sprache $L_N \cup \{c\}$. Ferner, sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen und sei

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) := \{\varphi \mid \varphi\ L_N\text{-Satz},\ \mathfrak{N} \models \varphi\}.$$

(1) Betrachten Sie die folgende Menge Γ von L-Sätzen

$$\Gamma := \{\underline{0} < c, S\underline{0} < c, SS\underline{0} < c, \cdots\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$ konsistent ist.

(2) Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma$. Zeigen Sie dass $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A} \restriction L_N$ nicht isomorph sind.

(3) Sei $A \subseteq P$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $S^n\underline{0}$ eine Abkürzung von $S \cdots S\underline{0}$, wobei das Symbol S n-mal auftritt, und sei $\Gamma(A)$ die folgende Menge von L-Sätzen:

$$\{\exists z\ S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in A\} \cup \{\neg\exists z S^p\underline{0} \cdot z \doteq c \mid p \in P \backslash A\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \Gamma(A)$ konsistent ist.

Aufgabe 3.

(1) Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie. Angenommen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von T mit $|A| \geq n$ (d.h. das Universum von $\mathfrak{A}$ enthält wenigstens n paarweise verschiedene Elemente). Zeigen Sie, dass es ein unendliches Modell von T gibt.

(2) Zeigen Sie, dass keine Theorie T für eine geignete Sprache L existiert, deren Modelle genau die endlichen Gruppen sind.

Hinweis: Zum Teil (1) - betrachten Sie, $T \cup \{\exists x_1, \cdots, x_n \bigwedge_{i<j} \neg x_i \doteq x_j\}$;

Aufgabe 4. Sei L eine Sprache. Für jede konsistente Menge Φ von L-Sätzen, sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine L-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Sei

$$\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \text{ konsistente Menge von } L\text{-Sätzen}\}.$$

Ferner, für jeden L-Satz φ sei $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$. Zeigen Sie, dass:

(1) die Menge $\{X_\varphi \mid \varphi\ L\text{-Satz}\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet;
(2) jede Menge X_φ abgeschlossen ist;
(3) jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 7, 16.05.2016

Aufgabe 1. Konstruiren Sei eine Registermaschine, die die Funktion $f(x, y) = x + y$ berechnet. Zeichnen Sie das Flußdiagram dieser Maschine.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie durch Flußdiagrame Registermaschinen, die Funktionen $g(x, y) = x \cdot y$ und $h(x, y) = x^y$ berechnen. Sie dürfen die Maschine aus Aufgabe 1 benutzen.

Aufgabe 3. Konstruiren Sie eine Registermaschine, die die Funktion $f(x, y) = |x - y|$ berechnet. Konstruiren Sie das Flußdiagram dieser Maschine.

Aufgabe 4. **(Bonus Punkte)** Seien $\mathcal{M}_f$ und $\mathcal{M}_g$ Registermaschinen, die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ berechnen. Konstruiren Sie eine Registermaschine, die die Hintereinanderausführung $g(f(x))$ berechnet.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 8, 24.05.2016

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$|m-n| = \begin{cases} m-n, & \text{wenn } m \geq n \\ n-m, & \text{wenn } m < n \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Relation $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ teilt } y\}$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

(1) die Relation $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Primzahl}\}$ primitiv rekursiv ist.
(2) die Funktion $f(n) = p_n$, wobei p_n die n-te Primzahl ist, rekursiv ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \lfloor \frac{x^3}{x+1} \rfloor$ rekursiv ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 9, 31.05.2016

Aufgabe 1. Sei $S \subseteq \mathbb{N}^2$ rekursiv. Geben Sie das Flussdiagram einer Maschine $\mathbb{M}$ an, die bei der Eingabe $|^x$ stoppt genau dann, wenn es ein y mit $(x, y) \in S$ gibt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge aller $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, wobei eine Maschine $\mathbb{M}$ mit Alphabet $\{|\}$ gibt, so dass $m = \ulcorner\mathbb{M}\urcorner$ und $\mathbb{M}$ bei $|^n$ hält, nicht rekursiv ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{M}$ eine Maschine, die bei jeder Eingabe $n \in \mathbb{N}$ nach höchstens n^{2016} Schritten hält. Zeigen Sie, dass die Funktion $F^1_{\mathbb{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Kleene Normalform.

Aufgabe 4. Eine auf einer Teilmenge A von $\mathbb{N}^n$ definierte Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ heisst *partiell rekursiv*, wenn ihr Graph

$$G(f) := \{(\bar{x}, y) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N} : \bar{x} \in A, y = f(x)\}$$

rekursiv aufzählbar ist. Zeigen Sie, dass die partiell rekursiven Funktionen genau die berechenbaren partiellen Funktionen sind.

Aufgabe 5. Beweisen Sie den *Uniformisierungssatz:* Jede rekursiv aufzählbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ lässt sich *unifomisieren.* Dies bedeutet: Es gibt eine partiell rekursive Funktion f_R mit Definitionsbereich

$$\{\bar{x} \in \mathbb{N} \mid \text{es existiert } y \text{ so dass } (\bar{x}, y) \in R\},$$

deren Graph in R liegt (d.h. wenn $f_R(\bar{x}) = y$ dann $(\bar{x}, y) \in R$).

Hinweis: Sei R gegeben durch: es existiert z so dass $(\bar{x}, y, z) \in S$ mit rekursivem S. Wählen Sie für jedes $\bar{x}$ im Definitionsbereich ein minimales $\langle y, z\rangle$ mit $(\bar{x}, y, z) \in S$ und setzen Sie $f_R(\bar{x}) = y$.

Aufgabe 6 (Bonus Punkte). Beweisen Sie den *Reduktionssatz* (eine Folgerung der Aufgabe 5.): Seien X und Y rekursiv aufzählbar. Dann gibt es rekursiv aufzählbare $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $X' \cup Y' = X \cup Y$ und $X' \cap Y' = \emptyset$.

Hinweis: Uniformisieren Sie $R = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: vera.fischer@univie.ac.at

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 10, 07.06.2016

Aufgabe 1.

(1) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:
   (a) $f(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$,
   (b) $f(x) = \lfloor \lg_2(x+1) \rfloor$

(2) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt, die primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion und sei p_i die i-te Primzahl (für alle i). Betrachten Sie die Funktion $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei

$$f^*(0) = 1$$

$$f^*(n+1) = \prod_{i=0}^{n} p_i^{f(i)},$$

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion, so dass $f(n) = g(f^*(n))$ für alle n. Zeigen Sie, dass die Funktion f^* primitiv rekursiv ist und dann auch, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3. Die Fibonacci Folge ist auf folgende Weise definiert:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n = 0 \\ 1, & \text{wenn } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{wenn } n \geq 2 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 4. Geben Sie eine Formel an, die die Fakultätsfunktion definiert.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass es eine arithmetische Relation gibt, die nicht rekursiv aufzählbar ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria
E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): ÜBUNGSBLATT 11, 14.06.2016

Aufgabe 1. Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer Maschine, die die charakteristische Funktion der Menge $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ ist eine atomare } L_N\text{-Formel}\}$ berechnet.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie eine Maschine, die bei Input $(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner x\urcorner, \ulcorner t\urcorner)$ für eine L_N-Formel φ, eine Variable x und einen L_N-Term t, die Gödelnummer von $\varphi\frac{t}{x}$ berechnet.

Aufgabe 3. Wenn man eine entscheidbare L_N-Theorie um endlich viele Axiome erweitert, erhält man wieder eine entscheidbare L_N-Theorie.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass wenn T eine inkonsistente L_N-Theorie ist, dann sind alle Relationen (Funktionen) über $\mathbb{N}$ in T repräsentierbar.

Aufgabe 5. Sei

$$\begin{aligned} f_1(x,0) &= h_1(x) \\ f_2(x,0) &= h_2(x), \\ f_1(x,t+1) &= g_1(x, f_1(x,t), f_2(x,t)), \\ f_2(x,t+1) &= g_2(x, f_1(x,t), f_2(x,t)), \end{aligned}$$

wobei die Funktionen h_1, h_2, g_1 und g_2 primitiv rekursiv sind. Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 auch primitiv rekursiv sind.

Augabe 6. (Bonus) Zeigen Sie, dass es eine arithmetische Relation gibt, die nicht rekursiv aufzählbar ist.

Kurt Gödel Research Center, University of Vienna, Währingerstrasse 25, 1090 Vienna, Austria

E-mail address: `vera.fischer@univie.ac.at`

UE GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN LOGIK (SS 2016): KLAUSURE, 09.05.2016

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt!

Name, Vorname: *Matrikelnummer:* *Unterschrift:*

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit **Ja** oder **Nein**.

Aufgabe 1.: Ist die folgende aussagenlogische Formel allgemeingültig?

2 Punkte

(1) $((X \to Y) \to ((Y \to Z) \to (X \to Z)))$
(2) $(X_1 \to (X_2 \to (X_3 \to (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3))))$

Antwort: (1): Ja (2): ja

Aufgabe 2.: Betrachten Sie die Sprache $L_N := \{\underline{0}, S, +, \cdot, <\}$ der natürlichen Zahlen und die L_N-Struktur $\mathfrak{N}$. Sei β eine Belegung in $\mathfrak{N}$, wobei $\beta(v_n) = 2n + 1$ für alle $n \geq 0$. Ist die folgende Aussage richtig?

3 Punkte

(1) $\mathfrak{N} \models \exists x\ x \cdot SS\underline{0} \doteq v_{2016}[\beta]$
(2) $\mathfrak{N} \models \exists x\ x \cdot SS\underline{0} \doteq Sv_{2016}[\beta]$
(3) $\mathfrak{N} \models \exists y\ y \doteq Sy[\beta]$

Antwort: (1): Nein (2): ja (3): Nein

Aufgabe 3.: Sei $L = \{R\}$ eine Sprache, wobei R ein zweistelliges Relationssymbol ist. Sei $\mathfrak{A} = (A, R^{\mathfrak{A}})$ die Struktur mit Universum $A = \{a, b, c\}$, wobei a, b, c paarweise verschieden sind und $R^{\mathfrak{A}} = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$. Ist die folgende Aussage richtig?

3 Punkte

(1) $\mathfrak{A} \models \exists x \forall y Rxy$
(2) $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y Rxy$
(3) $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)$

Antwort: (1): ja (2): Nein (3): Nein

Aufgabe 4.: Sei L_N die Sprache der Arithmetik und $\mathfrak{N}$ die L_N-Struktur. Eine Teilmenge X von $\mathbb{N}^n$ heisst *definierbar in* $\mathfrak{N}$ wenn es eine Formel $\varphi = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ gibt, so dass

$$X = \{(a_1, \cdots, a_n) \in A^n \mid \mathfrak{N} \models \phi[a_1, \cdots, a_n]\}.$$

(1) Ist die Menge von allen geraden Zahlen definierbar in $\mathfrak{N}$?
(2) Ist die Menge $\{3\}$ definierbar in $\mathfrak{N}$?
(3) Ist die Menge der Primzahlen definierbar in $\mathfrak{N}$?

3 Punkte

Antwort: (1): ja (2): ja (3): ja

Aufgabe 5.: Ist die folgende Aussage richtig?
Es gibt eine endliche Sprache L und einen L-Satz ψ, so dass ψ ein unendliches Modell aber kein abzählbar unendliches Model hat.

2 Punkte

Antwort: Nein

Aufgabe 6.: Ist die folgende Aussage richtig?
Es gibt eine Sprache L und eine L-Theorie, so dass T ein unendliches Modell aber kein überabzählbares Modell hat.

2 Punkte

Antwort: Nein